

## ELASTİK MESNETLİ KOLONLARIN KAYMA VE EKSENEL TESİRLER DİKKATE ALINARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Oktay DEMİRDAĞ

Dokuz Eylül Ün., Müh. Fak., İnşaat Müh. Böl., Tınaztepe Kampüsü, 35160-Buca, İzmir  
Eposta: [oktay.demirdag@deu.edu.tr](mailto:oktay.demirdag@deu.edu.tr)

**Makalenin Geliş Tarihi:** 31.12.2004

**ÖZET:** Çerçevelerin dinamik analizinde hesap kolaylığı açısından, çerçevelerin zemine bağlandığı noktaların tam ankastre olduğu, kat kütlelerinin kat seviyelerinde topraklandığı, kolonların yayılı kütlelerinin ve kayma deformasyonunun ihmal edildiği kabullerine sık rastlanmaktadır. Ancak uygulamada çoğu kez çerçevelerin zemine bağlandığı noktalar, zeminin elastik davranışı nedeni ile bir miktar dönebilmekte ve ötelenebilmektedir. Bu durumda çerçevenin zemine bağlandığı noktaya dönmeye ve ötelenmeye karşı elastik yaylar yerleştirilerek yarı-rijit mesnet davranışı modellenebilir. Bu çalışmada, zemine yarı-rijit bağlı tek katlı çerçevelerin serbest titreşim analizi kolonların yayılı kütleleri ve kayma deformasyonu dikkate alınarak yapılmış ve açılal frekansları elde edilmiştir. Kolon tabanındaki ötelenme ve dönme yay sabiti değerlerindeki artışın frekans değerlerinde meydana getirdiği artma ve kolon üst serbest ucundaki toplu kütlelerin ve dönme ataletinin değerlerindeki artışın frekanslarda meydana getirdiği azalma grafiklerle sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Eğilme titreşimi, elastik mesnet, kayma etkisi, ikinci merteye teorisi.

### Free Vibration Analysis of Elastically Supported Columns Including Shear and Axial Effects

**ABSTRACT:** The assumptions of frame supports being fully rigid; storey masses being concentrated at the floor levels; distributed masses and shear deformations of the columns being neglected are frequently seen in dynamic analysis of frames because of less effort in calculation. In practice, however, columns may usually rotate and translate a little due to elastic behavior of soil. In this case, elastic support behavior can be modeled using elastic springs against translation and rotation at the column bases. In this study, free vibration of elastically supported columns is studied including shear deformation of the column and natural frequencies are obtained. Increasing effect of increasing rotational and translational spring coefficients at the column base and decreasing effect of increasing concentrated mass and its rotational inertia at the top of column on frequency values are presented in graphs.

**Keywords:** Flexural vibration, elastic support, shear effect, second order theory.

### GİRİŞ

Kolonların serbest titreşim analizi yapılırken genellikle rijit mesnet kabulü yapılır. Bu kabuller, matematiksel hesap modelinin dinamik analizini kolaylaştırmaktadır.

Bu konu ile ilgili literatürde toplu kütleli kirişlerin titreşimi (Maurizi ve Belles, 1991; Chai

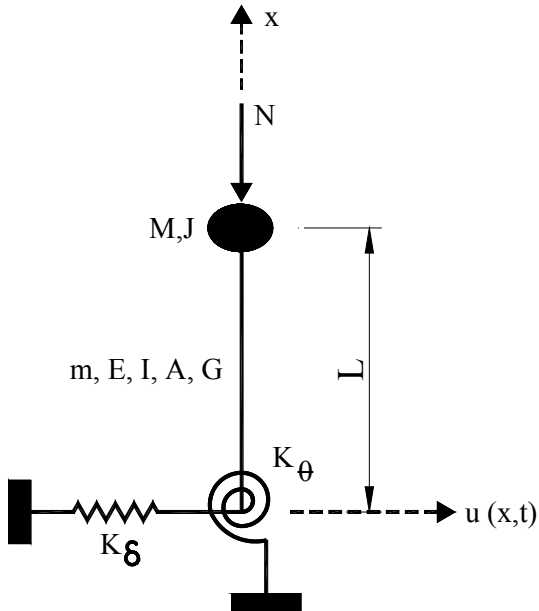
ve Low, 1993; Low, 1994), toplu kütleli konsol kirişlerin titreşimi (Maurizi ve Belles, 1992; Low ve diğ., 1993), elastik mesnetli ve toplu kütleli kirişlerin titreşimi (Goel, 1976; Bapat, 1987), elastik mesnetli ve toplu kütleli konsol kirişlerin titreşimi (Laura ve diğ., 1975; DeRosa ve diğ., 1996) ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur.

Bunlara ek olarak Michaltsos ve Ermopoulos (2001), bu çalışmadaki modelin serbest ve zorlanmış titreşimini, kolonun kayma şekil değiştirmeleri ve dönme ataletini dikkate almadan incelemişlerdir. Glabisz (1999), statik yükleme etkisindeki, sadece ötelenmeye karşı elastik mesnetli, sürekli ve doğrusal çubukların titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Güler (1996), zemin fleksibilitesinin kule tipi yapıların serbest titreşimi üzerindeki etkisini Bernoulli-Euler modeliyle araştırmıştır.

Kolonların zemine bağlandığı noktaların davranışı elastik mesnetlenmiş modele daha uygundur. Kolonun dinamik hesap modeli Şekil 1'de sunulmuştur. Hesap modelindeki elastik kolonun üst ucunda toplu kütle, alt ucunda ise elastik mesnet davranışını temsil eden dönmeye ve ötelenmeye karşı elastik yaylar mevcuttur.

Bu çalışmada yapılan kabuller aşağıda sunulmuştur.

- 1) Kolona etkiyen aksel kuvvet kolon boyunca sabit kalmaktadır.
- 2) Elastik mesnet, ötelenmeye ve dönmeye karşı elastik yaylar ile modellenmiştir.
- 3) İkinci mertebe teorisi dikkate alınmıştır.



Şekil 1. Zemine elastik mesnetli kolonun dinamik hesap modeli.

Figure 1. Dynamic calculation model of elastically supported column.

## HAREKET DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

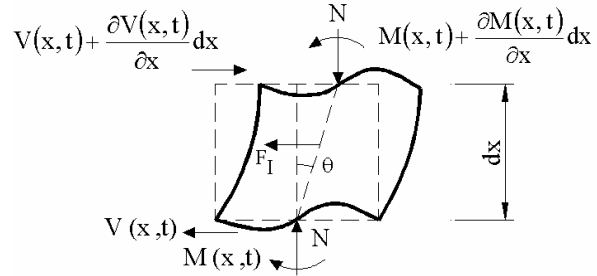
Şekil 1'de sunulan hesap modelindeki sabit kütleli çubuğun eğilme ve kayma tesirlerinden oluşan şekil değiştirmeleri dikkate alındığından kolonun toplam yerdeğiştirmesi için (1) bağıntısını yazmak mümkündür.

$$u(x,t) = u_b(x,t) + u_s(x,t) \quad (1)$$

Burada  $u_b$  ve  $u_s$  sırasıyla, eğilmeden ve kaymadan ötürü oluşan yerdeğiştirmeyi;  $u$ , toplam yerdeğiştirmeyi;  $x$  ve  $t$  sırasıyla, konum ve zaman değişkenlerini göstermektedir. Kayma tesiri ile oluşan yerdeğiştirme ve eğilmeden ötürü oluşan eğrilik sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{V(x,t)k}{AG} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} = -\frac{M(x,t)}{EI} \quad (3)$$



Şekil 2. Hesap modelindeki kolonun iç kuvvet ve şekil değiştirmeleri.

Figure 2. Internal forces and deformations of the column in the calculation model.

Burada  $V(x,t)$  ve  $M(x,t)$  sırasıyla, kesme kuvveti ve moment fonksiyonlarını;  $F_I$ , diferansiyel parçanın atalet kuvvetini;  $N$ , sabit aksel kuvveti;  $EI$  ve  $AG$ , kolonun sırasıyla, eğilme ve kayma rijitliklerini;  $k$ , çubuğun en kesitine bağlı kayma alanı katsayısını göstermektedir. Şekil 2'ye göre aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) + N \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

Burada  $m$  kolonun yayılı kütleini göstermektedir. (1), (4) ve (5) bağıntıları kullanılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak Şekil 1'deki sistemin toplam yerdeğiştirmesine bağlı diferansiyel hareket denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{N}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{mk}{AG} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

$(0 \leq x \leq L)$

(6)'daki diferansiyel denklemin çözümü için (7)'de verilen dönüşüm kullanılarak değişkenlere ayırma yöntemi uygulanmıştır.

$$u(x,t) = X(x) \cdot \sin(\omega t) \quad (7)$$

$$X^{IV} + \left[ \frac{N}{EI} + \frac{mk\omega^2}{AG} \right] X^{II} - \left[ \frac{m\omega^2}{EI} \right] X = 0 \quad (8)$$

### KESİT DÖNMESİ, MOMENT VE KAYMA KUVVETİ FONKSİYONLARI

Kaymanın ve eksenel kuvvetin eğilme momentine etkisi dikkate alınır; eğilme momenti fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI \frac{mk\omega^2}{AG} u(x,t) - Nu(x,t) \quad (9)$$

Kesme kuvveti fonksiyonu, (12) eğilme momenti fonksiyonundan elde edilir.

$$V(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - EI \frac{mk\omega^2}{AG} \frac{\partial u}{\partial x} - N \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

Eğilme, kesme ve eksenel tesirler altında sürekli kütleli bir sistemin kesit dönmesi fonksiyonu

$\theta(x,t)$  için, toplam deplasmana bağlı aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} = \theta(x,t) = \frac{k}{AG} \left\{ EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left[ EI \frac{mk\omega^2}{AG} + \frac{AG}{k} + N \right] \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad (11)$$

### BOYUTSUZ ANALİZ

(8) diferansiyel hareket denklemini  $z=x/L$  için boyutsuz olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z^{IV} + \left[ \frac{NL^2}{EI} + \frac{mkL^2\omega^2}{AG} \right] Z^{II} - \left[ \frac{mL^4\omega^2}{EI} \right] Z = 0 \quad (12)$$

(12) diferansiyel denklemin çözümü,  $\Delta > 0$  ve  $n_2 < 0$  olduğu için,  $n_1$  parametresine bağlı olarak elde edilir.

$$(n_1 > 0) \quad Z(z) = C_1 \sinh(m_1 z) + C_2 \cosh(m_1 z) + C_3 \sin(m_2 z) + C_4 \cos(m_2 z) \quad (13)$$

$$(n_1 < 0) \quad Z(z) = C_1 \sin(m_1 z) + C_2 \cos(m_1 z) + C_3 \sin(m_2 z) + C_4 \cos(m_2 z) \quad (14)$$

Burada  $n_1 > 0$  için,  $m_1 = \sqrt{n_1}$ ,  $n_1 < 0$  için  $m_1 = \sqrt{|n_1|}$ ;

$$m_2 = \sqrt{|n_2|}; \quad n_1 = \frac{-\alpha_2 + \sqrt{\Delta}}{2}; \quad n_2 = \frac{-\alpha_2 - \sqrt{\Delta}}{2};$$

$$\Delta = \alpha_2^2 + 4\bar{\omega}^2; \quad \alpha_2 = \bar{N} + \alpha_1; \quad \bar{N} = \frac{NL^2}{EI};$$

$$\alpha_1 = \frac{mkL^2\omega^2}{AG}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{mL^4\omega^2}{EI}; \quad C_1, \dots, C_4 = \text{sabit.}$$

(9), (10) ve (11) moment, kesme kuvveti ve kesit dönmesi fonksiyonları boyutsuz olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{M}(z) = -\frac{EI}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - EI \frac{mk\omega^2}{AG} \bar{u}(z) - N \bar{u}(z) \quad (15)$$

$$\bar{V}(z) = -\frac{EI}{L^3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial z^3} - \frac{EI}{L} \frac{mk\omega^2}{AG} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{N}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (16)$$

$$\bar{\theta}(z) = \frac{k}{AG} \left\{ \frac{EI}{L^3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial z^3} + \left[ \frac{EI}{L} \frac{mk\omega^2}{AG} + \frac{AG}{k \cdot L} + \frac{N}{L} \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\} \quad (17)$$

Şekil 1'deki sistem için kullanılacak dört adet boyutsuz sınır şartları ( $0 \leq z \leq 1$ ) için aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{V}(0) \frac{L^3}{EI} &= \bar{K}_\delta \bar{u}(0) \\ \bar{M}(0) \frac{L^2}{EI} &= -\bar{K}_\theta L \bar{\theta}(0) \\ \bar{V}(1) \frac{L^3}{EI} &= \bar{M} \bar{\omega}^2 \bar{u}(1) \\ \bar{M}(1) \frac{L^2}{EI} &= -\bar{J} L \bar{\omega}^2 \bar{\theta}(1) \end{aligned} \quad (18)$$

Burada  $\bar{K}_\delta$  ve  $\bar{K}_\theta$  sırasıyla, ötelenme ve dönme yay sabitlerine ait,  $\bar{M}$  ve  $\bar{J}$  sırasıyla, toplu kütle ve onun dönme ataletine ait boyutsuz parametrelerdir ve (19) numaralı bağıntılarda verilmişlerdir.

$$\bar{K}_\delta = \frac{K_\delta L^3}{EI}; \quad \bar{K}_\theta = \frac{K_\theta L}{EI}; \quad \bar{M} = \frac{M}{mL}; \quad \bar{J} = \frac{J}{mL^3} \quad (19)$$

(18) sınır şartları kullanılarak dört adet lineer denklem takımı elde edilmiş ve matris formda aşağıda sunulmuştur.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{15} & \bar{K}_\delta & \alpha_{16} & \bar{K}_\theta \\ -\alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{12} \\ \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{27} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Burada } \alpha_3 &= \frac{AG}{kEI}; & \alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 L^3}; \\ \alpha_5 &= \alpha_1 + \alpha_3 L^2 + \bar{N}; & \alpha_6 &= \alpha_4 \alpha_5; & \alpha_7 &= \bar{K}_\theta \alpha_4 L; \\ \alpha_8 &= \bar{K}_\theta \alpha_6 L; & \alpha_9 &= \bar{J} L \bar{\omega}^2 \alpha_4; & \alpha_{10} &= \bar{J} L \bar{\omega}^2 \alpha_6; \\ \alpha_{11} &= m_1^2 + \alpha_2; & \alpha_{12} &= \alpha_2 - m_2^2; \\ \alpha_{13} &= m_1(m_1^2 \alpha_7 + \alpha_8); & \alpha_{14} &= m_2(m_2^2 \alpha_7 - \alpha_8); \\ \alpha_{15} &= m_1 \alpha_{11}; & \alpha_{16} &= m_2 \alpha_{12}; & \alpha_{17} &= \bar{M} \bar{\omega}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{18} &= \alpha_{15} c1 + \alpha_{17} s1; & \alpha_{19} &= \alpha_{15} s1 + \alpha_{17} c1; \\ \alpha_{20} &= \alpha_{16} c2 + \alpha_{17} s2; & \alpha_{21} &= -\alpha_{16} s2 + \alpha_{17} c2; \\ c1 &= \cosh(m_1); & s1 &= \sinh(m_1); & c2 &= \cos(m_2); & s2 &= \sin(m_2); \\ \alpha_{22} &= m_1(m_1^2 \alpha_9 + \alpha_{10}); & \alpha_{23} &= m_2(m_2^2 \alpha_9 - \alpha_{10}); \\ \alpha_{24} &= \alpha_{11} s1 - \alpha_{22} c1; & \alpha_{25} &= \alpha_{11} c1 - \alpha_{22} s1; \\ \alpha_{26} &= \alpha_{12} s2 + \alpha_{23} c2; & \alpha_{27} &= \alpha_{12} c2 - \alpha_{23} s2 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

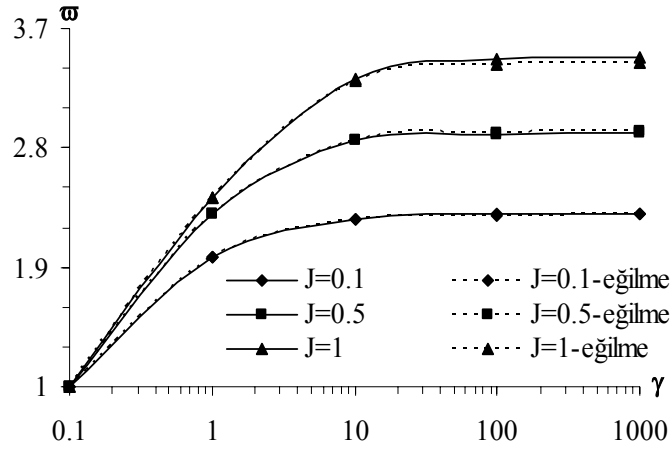
(20) denklem takımının determinantının sıfıra eşitlenmesi suretiyle elde edilen fonksiyon, Şekil 1'de verilen sistemin frekans denklemdir.

### SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada sayısal uygulama olarak seçilen zemine elastik bağlı kolona ait dinamik hesap modelindeki aksel kuvvetin, üst uçtaki toplu kütle ve dönme ataletinin, alt uçtaki ötelenme ve dönme yayının boyutsuz parametreleri için kullanılan değerler aşağıda sunulmuştur.

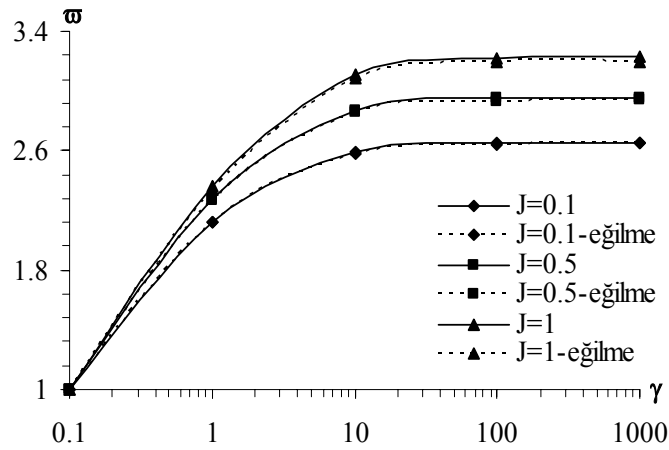
$$\begin{aligned} \bar{N} &= 0.1-0.25-0.5-0.75-1 \\ \bar{M} &= 0.1-0.5-1-5.0-10 \\ \bar{J} &= 0.1-0.5-1-5.0-10 \\ \bar{K}_\delta &= 0.1-1-10-100-1000 \\ \bar{K}_\theta &= 0.1-1-10-100-1000 \end{aligned}$$

Hesaplamalar sonucunda, dönme ve ötelenme yayı sabitlerinin değerlerindeki artışın açısal frekans değerlerini arttırdığı görülmüştür. Dönme yayı sabitindeki artışın  $\bar{J}$ 'nin farklı değerleri için frekans değerlerinde meydana getirdiği değişimin birinci mod için grafiksel sunumu  $\bar{N}=0.1$  ve  $\bar{M}=0.1-1-10$  Şekil 3-5'de;  $\bar{N}=0.5$  ve  $\bar{M}=0.1-1-10$  için Şekil 6-8'de;  $\bar{N}=1.0$  ve  $\bar{M}=0.1-1-10$  için Şekil 9-11'de verilmiştir. Yatay eksenindeki  $\gamma$ , boyutsuz dönme yayı sabitinin boyutsuz ötelenme yayı sabitine oranını, düşey eksenindeki  $\varpi$ , 1. moda ait normalleştirilmiş frekans değerlerini göstermektedir. Grafiklerin tamamında, kayma ve aksel etkilerin dikkate alınmadığı eğilme titreşimine ait normalleştirilmiş frekans değerlerinin değişimi kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



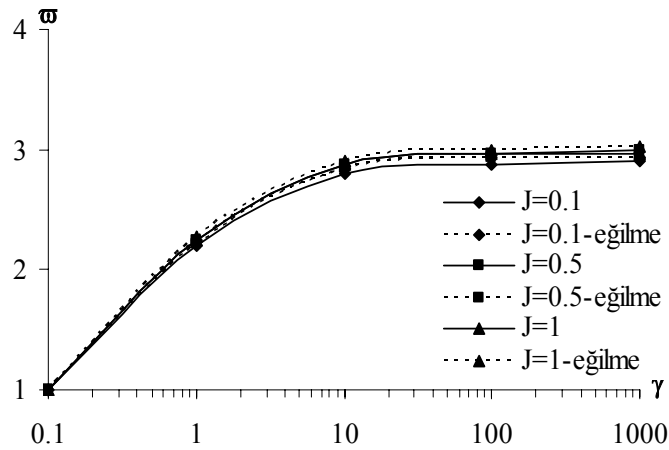
Şekil 3. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 0.1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 3. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 0.1$ .



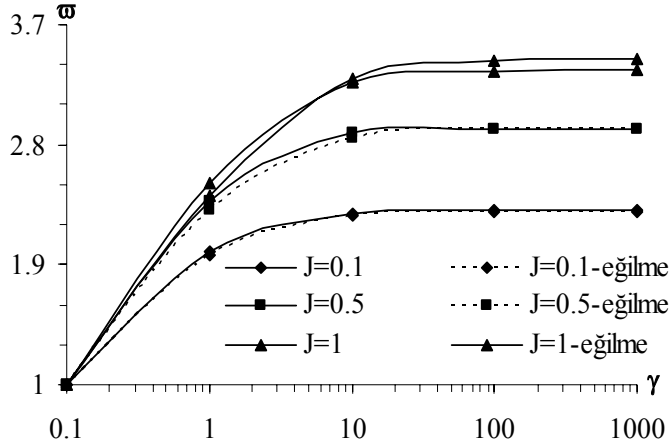
Şekil 4. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 4. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 1$ .



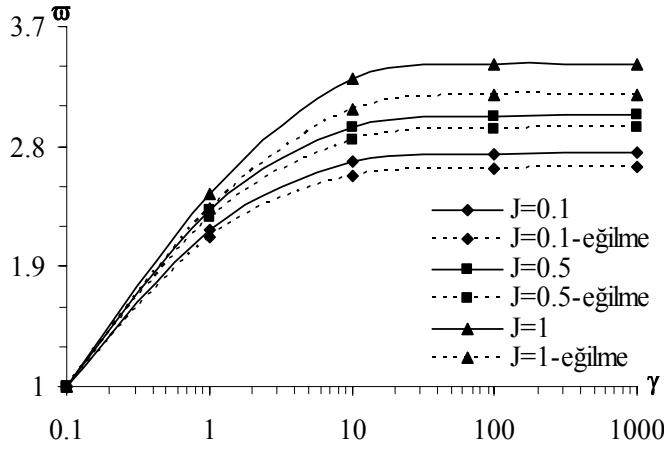
Şekil 5. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 10$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 5. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.1$ ,  $\bar{M} = 10$ .



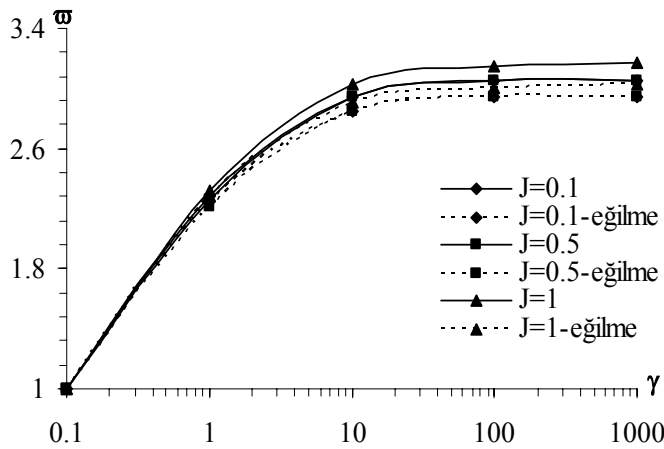
Şekil 6. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 0.1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 6. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 0.1$ .



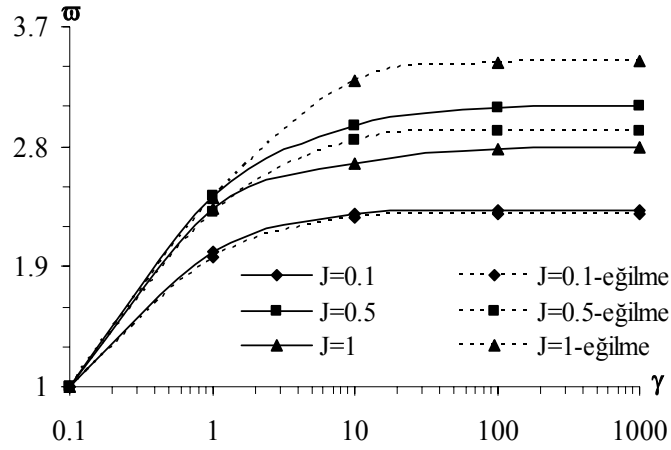
Şekil 7. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 7. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 1$ .

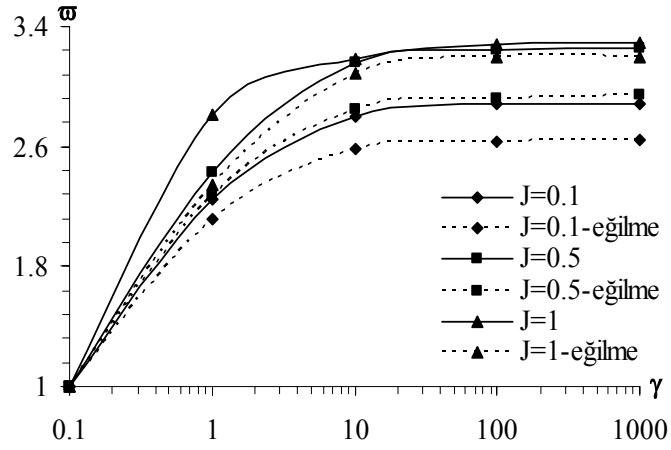


Şekil 8. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 10$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

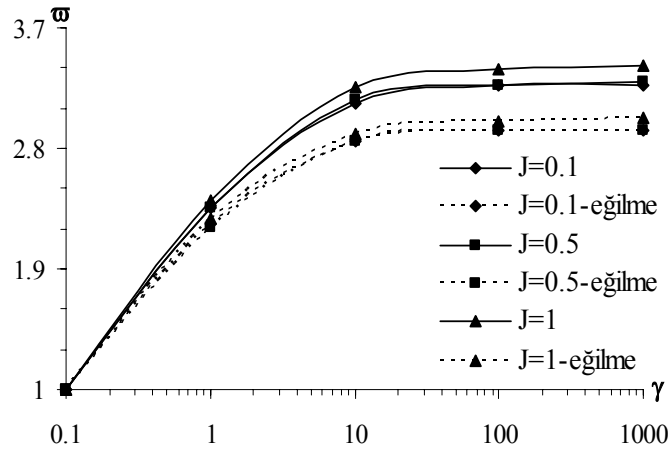
Figure 8. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N} = 0.5$ ,  $\bar{M} = 10$ .



Şekil 9. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=0.1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 9. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=0.1$ .



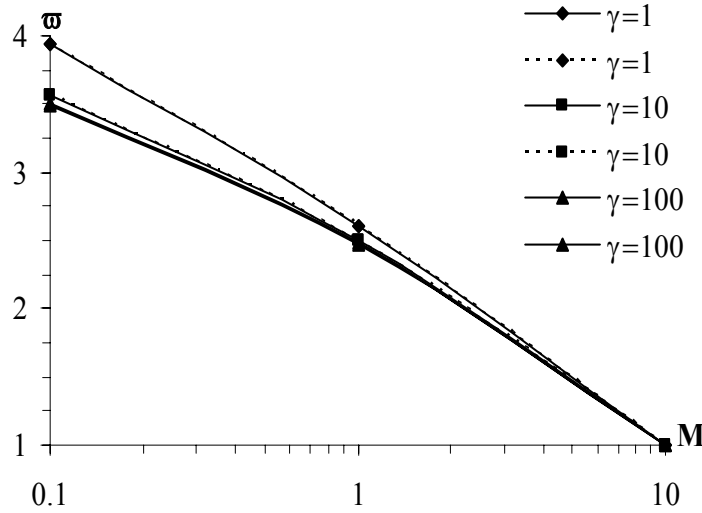
Şekil 10. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=1$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 10. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=1$ .



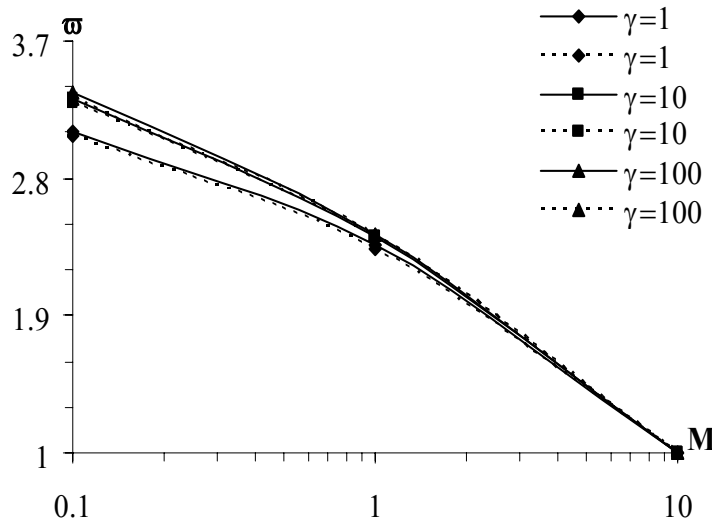
Şekil 11. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=10$  için  $\bar{J}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 11. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{J}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{M}=10$ .

Zemindeki ötelenme ve dönme yaylarının aksine, kolonun üst serbest ucundaki toplu kütle ve onun dönme ataleti arttırıldıkça açısal frekans değerlerinde azalma görülmüştür. Bu azalmanın  $\gamma$ 'nın farklı değerleri için  $\bar{M}$ 'ye bağlı grafiksel gösterimi de  $\bar{N}=0.1$  ve  $\bar{J}=0.1-1-10$  Şekil 12-14'de;  $\bar{N}=0.5$  ve  $\bar{J}=0.1-1-10$  için Şekil 15-17'de;  $\bar{N}=1.0$  ve  $\bar{J}=0.1-1-10$  için Şekil 18-20'de sunulmuştur.

Yatay eksendeki  $\bar{M}$ , toplu kütlelerin çubuğun toplam kütlelerine oranı olan boyutsuz parametreyi, dikey eksendeki  $\omega$ , 1. moda ait normalleştirilmiş frekans değerlerini göstermektedir. Grafiklerin tamamında, kayma ve aksel etkilerin dikkate alınmadığı eğilme titreşimine ait normalleştirilmiş frekans değerlerinin değişimi kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

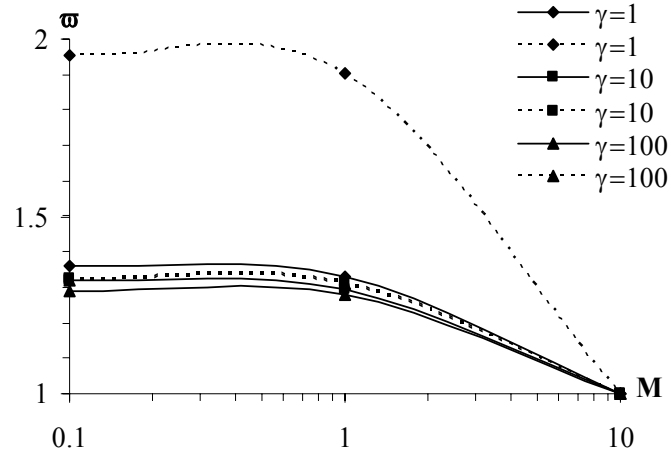


Şekil 12. Normalleştirilmiş değerlerinin  $\bar{N}=0.1, \bar{J}=0.1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
Figure 12. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.1, \bar{J}=0.1$ .

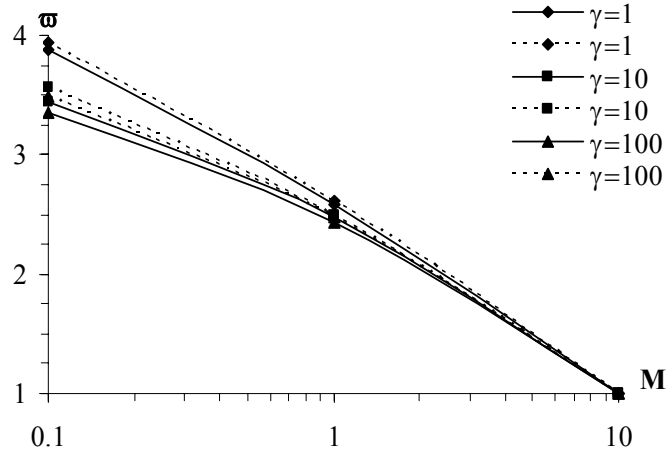


Şekil 13. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=0.1, \bar{J}=1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
Figure 13. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.1, \bar{J}=1$ .

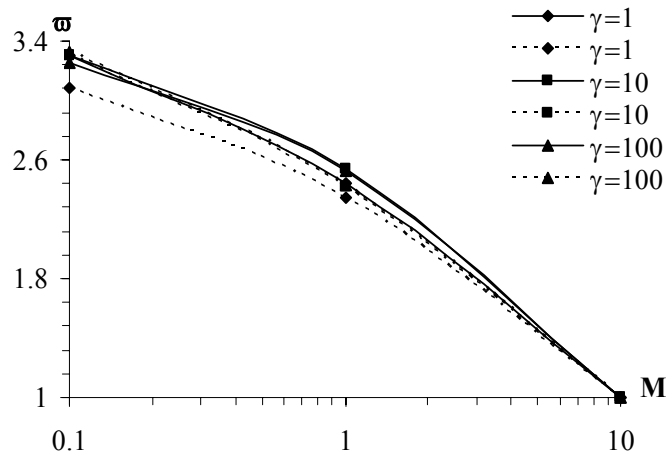




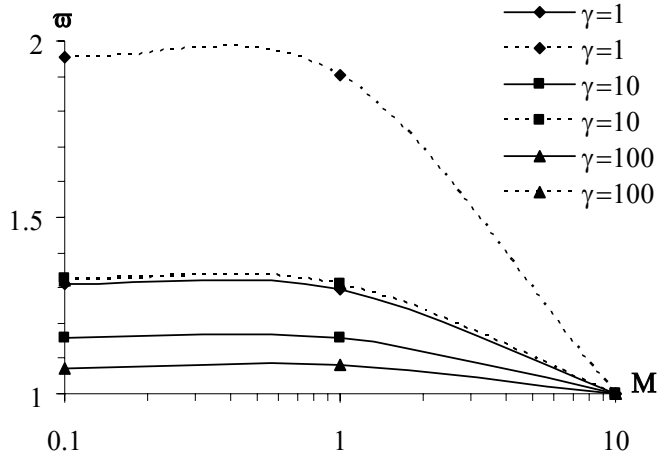
Şekil 14. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=0.1$ ,  $\bar{J}=10$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 14. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.1$ ,  $\bar{J}=10$ .



Şekil 15. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=0.1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 15. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=0.1$ .

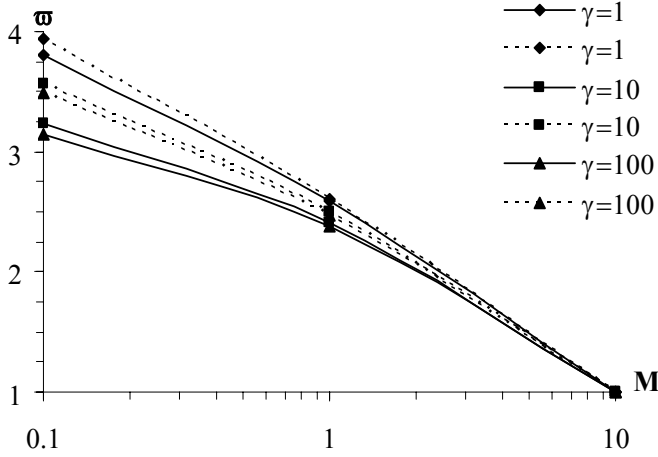


Şekil 16. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.  
 Figure 16. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=1$ .



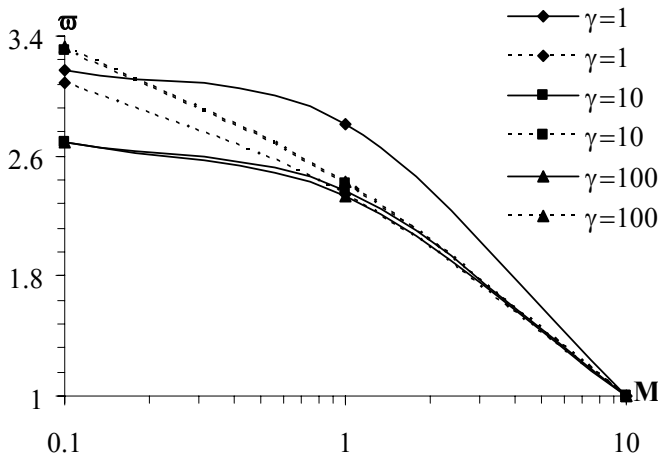
Şekil 17. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=10$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 17. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=0.5$ ,  $\bar{J}=10$ .



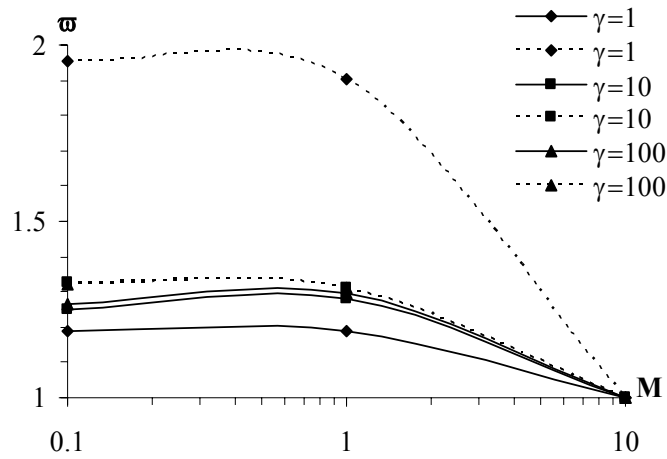
Şekil 18. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=0.1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 18. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=0.1$ .



Şekil 19. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=1$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 19. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=1$ .



Şekil 20. Normalleştirilmiş frekans değerlerinin  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=10$  için  $\bar{M}$  ve  $\gamma$ 'ya bağlı değişimi.

Figure 20. Variation of the normalized frequency values due to  $\bar{M}$  and  $\gamma$  for  $\bar{N}=1$ ,  $\bar{J}=10$ .

Sayısal uygulama sonucunda, bu çalışmadaki matematiksel modeli kullanan kaynakta (Michaltsos ve Ermopoulos, 2001) hesaplanan frekans değerlerine çok yakın değerler elde edilmiş ve eksenel kuvvetin ve ötelenme yay katsayısının 0.1 değeri için bu çalışmada ve kaynakta bulunan frekans değerleri dönme yay katsayısının, toplu kütle ve dönme ataletinin farklı boyutsuz değerlerine göre Tablo 1'de sunulmuştur.

## SONUÇLAR

Bu çalışmada, Şekil 1'deki gibi modellenen elastik mesnetli kolonların serbest titreşim analizi incelenmiştir. Kütleli yayılı olarak modellenmiş, üst ucunda toplu kütle bulunan

elastik çubuğun kayma şekil değiştirmesi de dikkate alınmıştır. Kolonun üst ucundaki toplu kütle döne ataleti de dinamik analize dahil edilmiştir. Zemin ile elastik kolonun yarı-rijit bağlantısı ötelenmeye ve dönmeye karşı elastik yaylar ile modellenmiştir.

Yayıllı kütle dikkate alınan kolonun eğilme titreşimine kayma deformasyonu etkisi dahil edildiğinde frekans değerlerinde azalma görülmektedir. Ancak bu azalma pratikte ihmal edilebilir mertebededir.

Kolonun alt ucundaki ötelenmeye ve dönmeye karşı yay sabitlerinin değerleri arttırıldığında sistemin açıl frekans değerlerinde artma, kolonun üst ucundaki toplu kütle ve onun dönme ataleti değerleri arttırıldığında ise sistemin serbest titreşimine ait açıl frekans değerlerinde azalma gözlenmiştir.

Tablo 1. Bu çalışmada ve kaynakta (Michaltsos ve Ermopoulos, 2001)  $\bar{N}=0.1$  ve  $\bar{K}_\delta=0.1$  için hesaplanan frekans değerlerinin kıyaslanması.

Table 1. Comparison of frequency values calculated in this study and in the reference (Michaltsos ve Ermopoulos, 2001) for  $\bar{N}=0.1$  and  $\bar{K}_\delta=0.1$ .

$\bar{K}_\theta$	$\bar{M}=0.1$				$\bar{M}=10$			
	$\bar{J}=0.1$		$\bar{J}=10$		$\bar{J}=0.1$		$\bar{J}=10$	
	Kaynak	Çalışma	Kaynak	Çalışma	Kaynak	Çalışma	Kaynak	Çalışma
1	0.78	0.79	0.18	0.20	0.20	0.20	0.13	0.16
10	0.91	0.91	0.29	0.30	0.26	0.26	0.19	0.20
100	0.92	0.93	0.31	0.31	0.27	0.27	0.21	0.24

**KAYNAKLAR**

- Bapat, C.N., 1987, Natural frequencies of a beam with non-classical boundary conditions and concentrated masses, *Sound Vib.*, **112**, 1, 177-182.
- Chai, G.B., Low, K.H., 1993, On the natural frequencies of beams carrying a concentrated mass, *Sound Vib.*, **160**, 1, 161-166.
- DeRosa, M.A., Franciosi, C., Maurizi, M.J., 1996, On the dynamic behavior of slender beams with elastic ends carrying a concentrated mass, *Comput. Struct.*, **58**, 6, 1145-1159.
- Glabisz, W., 1999, Vibration and stability of a beam with elastic supports and concentrated masses under conservative and nonconservative forces, *Comput. Struct.*, **70**, 305-313.
- Goel, R.P., 1976, Free vibration of a beam-mass system with elastically restrained ends; *Sound Vib.*, **47**, 1, 9-14.
- Güler, K., 1996, Effects of soil flexibility on free vibrations of tower-like structures, Proceedings of the I. Symposium on Mathematical and Computational Applications, November 19-21, Manisa, Turkey.
- Laura, P.A.A., Maurizi, M.J., Pambo, J.L., 1975, A note on the dynamic analysis of an elastically restrained-free beam with a mass at the free end, *Sound Vib.*, **41**, 4, 397-405.
- Low, K.H., Lim, T.M., Chai, G.B., 1993, Experimental and analytical investigations of vibration frequencies for centre-loaded beams, *Comput. Struct.*, **48**, 6, 1157-1162.
- Low, K.H., 1994, An equivalent-center method for quick frequency analysis of beams carrying a concentrated mass, *Comput. Struct.*, **50**, 3, 409-419.
- Maurizi, M.J., Belles, P.M., 1991, Natural frequencies of the beam-mass system: Comparison of the two fundamental theories of beam vibrations, *Sound Vib.*, **150**, 2, 330-334.
- Maurizi, M.J., Belles, P.M., 1992, An additional evaluation of free vibration of beam-mass systems, *Sound Vib.*, **154**, 1, 182-186.
- Michaltsos, G.Th., Ermopoulos, J.Ch., 2001, Dynamic response of column bases; *Eng. Struct.*, **23**, 58-71.