

SUSURLUK HAVZASI'NDA M. KEMAL PAŞA ÇAYI'NIN AYLIK AKIMLARININ OTOREGRESİF HAREKETLİ ORTALAMA (ARMA) MODELİ

İbrahim CAN¹ ve Cahit YERDELEN²

Atatürk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 25240-Erzurum

ibcan@atauni.edu.tr, yerdelen@atauni.edu.tr

Makalenin Geliş Tarihi: 25.05.2005

ÖZET: Bu çalışmada, Susurluk havzasındaki M.Kemal Paşa Çayı üzerinde bulunan 302 numaralı akım gözlem istasyonunda ölçülen aylık akımların Otoresif Hareketli Ortalama (ARMA) modelinin matematiksel ifadesi elde edilmiştir. Modelin oluşturulmasında kullanılan veriler EİE Akım Gözlem Yıllıklarından alınmıştır. Söz konusu akım gözlem istasyonu için, en uygun model olarak otoresif parametresi (ϕ) 0.8704 ve hareketli ortalama parametresi (θ) 0.2861 olan ARMA(1,1) modeli seçilmiştir. Otoresif parametrenin hareketli ortalama parametreye nazaran daha büyük oluşu M.Kemal Paşa Çayı akımında yeraltı suyu katkısının önemli miktarda olduğunu göstermektedir. Porte Manteau ve otokorelasyon testleri artık terimlerin stokastik bağımlı olmadıklarını göstermiştir. Elde edilen matematiksel model kullanılarak tarihi seri ile aynı uzunlukta 100 adet sentetik seri türetilmiştir. Türetilen serilerin hem aylık ortalamalarının ve aylık standart sapmalarının hem de korelogramlarının %95 güven düzeyinde tarihi zaman serisinin aynı özelliklerini muhafaza etmesi nedeniyle elde edilen modelin M.Kemal Paşa Çayı için geçerli bir model olduğu kabul edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Susurluk havzası, periyodik otoresif hareketli ortalama modeli, stokastik hidroloji.

Autoregressive-Moving-Average (ARMA) Modeling of Monthly Flows of M. Kemal Paşa River, Susurluk Basin

ABSTRACT: In this study, an Autoregressive-Moving-Average (ARMA) model of monthly flows at gauging station 302 on M. Kemal Paşa river, Susurluk basin, was constructed. Studies were carried out by using data from the water yearbooks published by EIE. ARMA(1,1) with autoregressive parameter (ϕ) 0.8704 moving average parameter (θ) 0.2861 was chosen as the best model among other potential models. The high autoregressive parameter with respect to moving average parameter shows that the groundwater fraction is very significant. Porte Manteau and autocorrelation tests have shown that the residual terms are independent. Using constructed ARMA(1,1) model, 100 synthetic series were generated. This model was proven to be suitable for M.Kemal Paşa river due to the fact that statistical moments of historical series were satisfactorily preserved in the generated series.

Keywords: Susurluk basin, seasonal autoregressive-moving-average model, stochastic hydrology.

GİRİŞ

Birçok hidrolojik değişkenin ardışık gözlemleri birbirinden bağımsız değildir. Böyle bir iç bağımlılığa stokastik bağımlılık ve aralarında stokastik bağımlılık bulunan

gözlemlerden oluşan bir zaman serisine de stokastik süreç denir (Bayazit 1981). Hidrolojide stokastik süreçleri incelemenin amacı bu süreçlerin yapısını ifade eden matematik modellerin kurulmasıdır. Bu modeller biriktirme haznelerinin hesabında ve bir takım hidrolojik

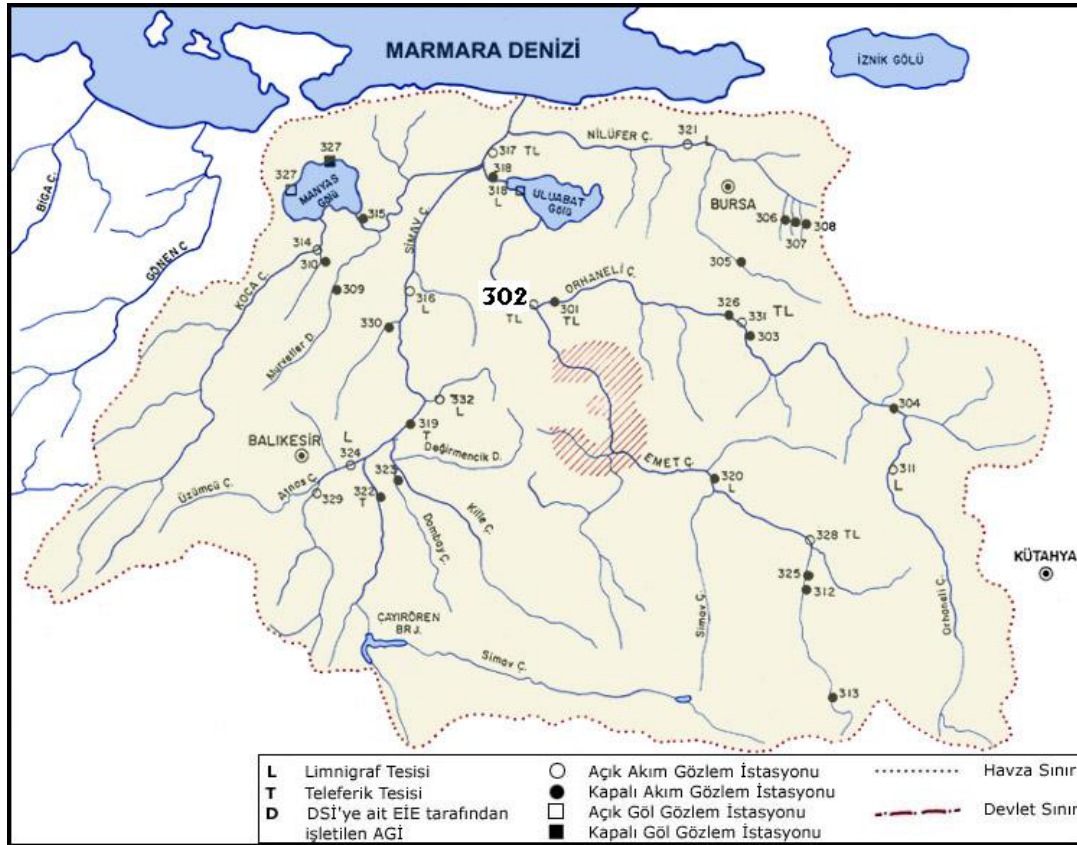
olayları tahmin etmede kullanılabilirler. Kurulacak matematik modelin kullanılacağı amaca göre söz konusu sürecin istatistik özelliklerini yeterli bir şekilde ifade edebilmesi gerekir (Salas ve diğ., 1980; Bayazit, 1981; Hipel ve McLeod, 1994). Stokastik hidroloji çalışmalarında, Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) modelleri, sentetik seri üretimi için en çok kullanılan modellerdir. Merzi ve diğ. (1995) Çoruh havzasındaki Oltu nehrinin aylık akımları için bir ARMA modeli kurmuşlar ve en uygun model olarak otoregresif parametresi (θ) 0.8536 ve hareketli ortalama parametresi (ϕ) 0.3109 olan ARMA(1,1) modelini önermişlerdir. Karabörk ve Kahya (1999) Sakarya havzasındaki aylık akımların çok değişkenli ARMA modelini araştırmış ve ARMA(1,1) modelini önermişlerdir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye'deki en uzun süreli akış verisine sahip akım gözlem istasyonlarından biri olan Susurluk havzasındaki 302 numaralı akım gözlem istasyonunun aylık akımları için bir stokastik

model kurmak ve model parametrelerinin havzanın özelliklerini ne kadar yansıttığını incelemektir. M.Kemal Paşa Çayı üzerindeki 302 numaralı akım gözlem istasyonunun drenaj alanı 9629.2 km² olup deniz seviyesinden yüksekliği 40 m'dir (Şekil 1).

YÖNTEM

Her hangi bir periyodik hidrolojik $y_{v,\tau}$ zaman serisinin analizinde en çok kullanılan modellerden biri Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) veya diğer bir adıyla Box-Jenkins modelidir (Salas ve diğ., 1980, Hipel ve McLeod 1994). Box-Jenkins metodolojisi değişik türdeki zaman serilerinin modellenmesinde sıkça kullanılmıştır (Box ve Jenkins, 1970). Burada v yıl, τ ($\tau = 1, \dots, \omega$) zaman aralığı (ay, mevsim vs.) dir. Zaman aralığının ay olması durumunda $\omega = 12$ dir. $t = (v - 1)\omega + \tau$ olmak üzere ARMA modelinin matematiksel ifadesi denklem (1)'deki gibidir.



Şekil 1. Susurluk Havzası (www.eie.gov.tr/turkce/hidroloji/03susurluk.html).

Figure 1. Susurluk Basin (www.eie.gov.tr/turkce/hidroloji/03susurluk.html).

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Burada z_t , boyutsuz hale getirilmiş ortalama aylık akımlar, p otoregresif kısmın derecesi, q hareketli ortalama kısmın derecesi, ϕ_1, \dots, ϕ_p otoregresif parametreler, $\theta_1, \dots, \theta_q$ hareketli ortalama parametreler ve ε_t modelin rasgele bileşenleridir. z_t aşağıda gösterildiği şekilde boyutsuz hale getirilmiştir:

$$z_{v,\tau} = (q_{t,m} - \bar{q}_m) / s_m \quad (2)$$

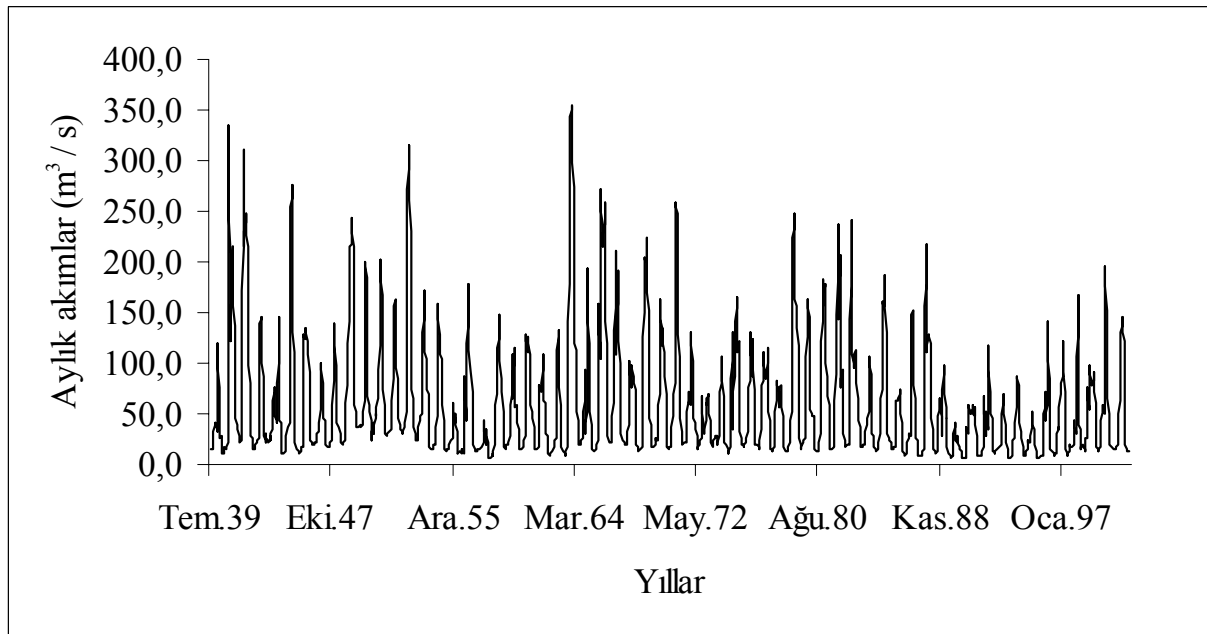
Burada $q_{t,m}$ aylık ortalama akımları, \bar{q}_m ölçüm süresi içinde, söz konusu aydaki ortalama akımların ortalamasını göstermektedir; s_m ise yine söz konusu aydaki ortalama akımların standart sapmasıdır.

Salas ve diğ. (1980), nehir akımına ait elde edilen bir stokastik modelin parametrelerinin hidrolojik anlamda havzanın hangi fiziksel

parametrelerine tekabül ettiklerini tartışırken, modelin otoregresif parametresinin yeraltı suyu kökenli katkı ve hareketli ortalama parametresinin de yağış kökenli katkı oluşturduğu varsayımından yola çıkmışlardır. Kuşkusuz yeraltı suyu katkısı aslında bir depolama fikrini, yağış kökenli katkı ise havzaya zaman içinde gelen rasgele bir katkıyı temsil etmektedir.

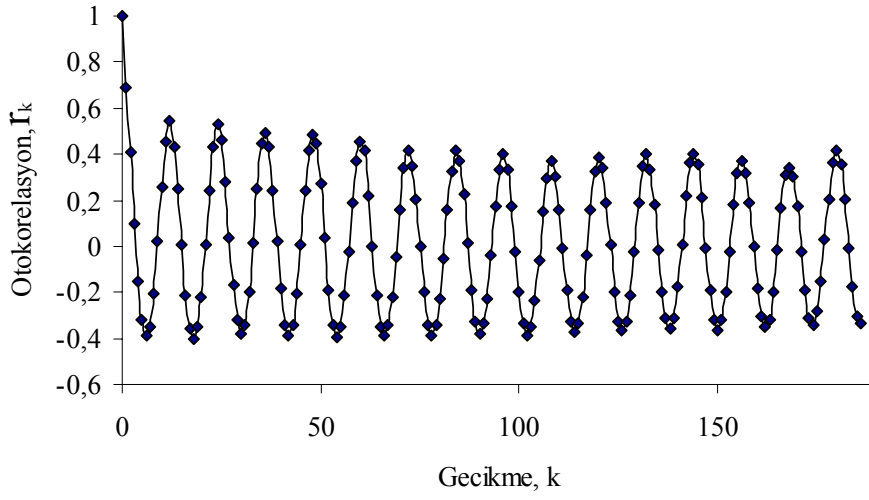
STOKASTİK MODELİN KURULMASI

Susurluk havzasındaki 302 numaralı akım gözlem istasyonuna ait Eylül 1939 - Ekim 2001 yılları arasında ölçülmüş olan aylık ortalama akımlar EİE'nin akım gözlem yıllıklarından alınmıştır (EİE, 2003). Şekil 2'de verilen serinin periyodik olduğu açıkça görülmektedir. Aynı periyodiklik serinin korelogram diyagramında da belirgindir (Şekil 3). Aylık ortalama akımların ölçüm süresi içindeki ortalamaları ve standart sapmaları ise sırasıyla Şekil 4 ve 5'de görülmektedir.



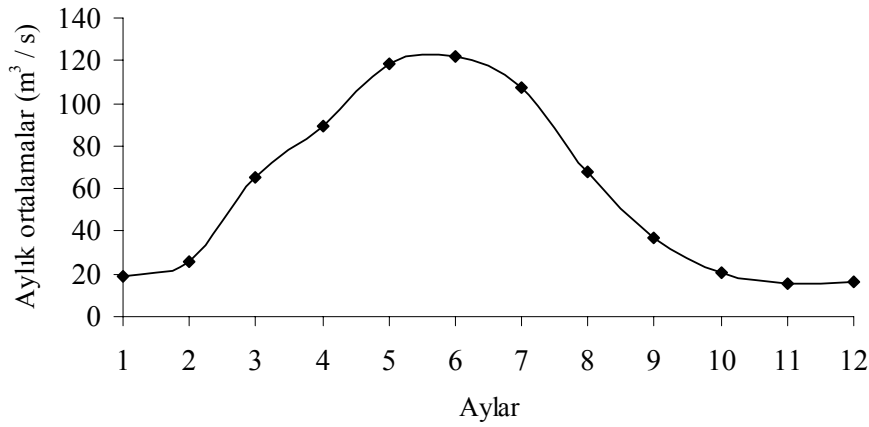
Şekil 2. 302 numaralı akım gözlem istasyonunda ölçülen aylık akımlar.

Figure 2. Monthly flows at 302 gauging station.



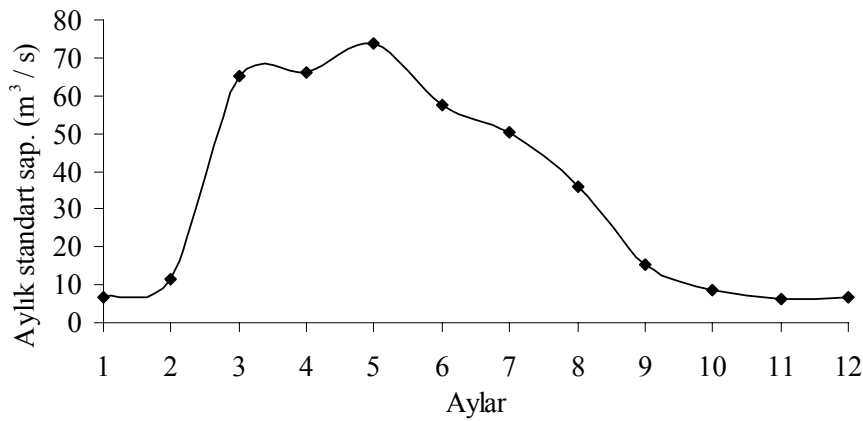
Şekil 3. Aylık akımların korelogramı.

Figure 3. Correlogram of monthly flows.



Şekil 4. Aylık akımların ortalamalarının değişimi.

Figure 4. Variation in mean of monthly flows.



Şekil 5. Aylık akımların standart sapmalarının değişimi.

Figure 5. Variation in standard deviation of monthly flows.

Modelin Tanımlanması

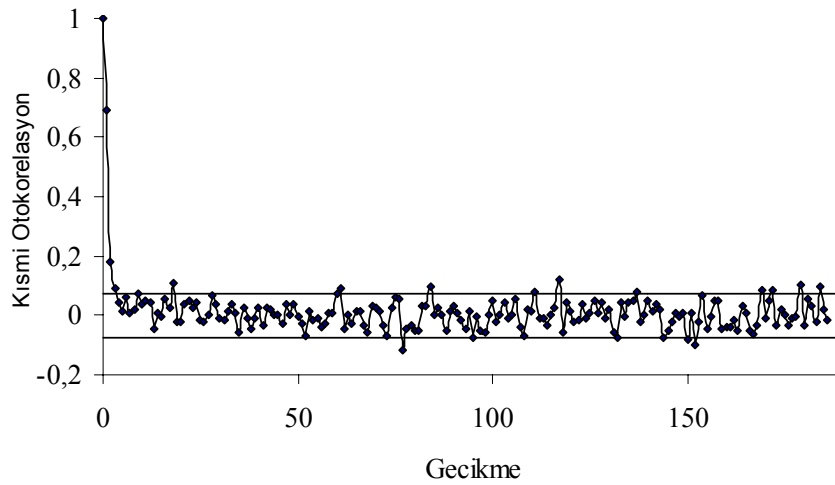
Aylık ortalama akımlar serisinin çarpıklık katsayısı 1.8917 olarak bulunmuştur. Çarpıklık katsayısının yüksekliği serinin normal dağılıma sahip olmadığını göstermektedir. Dolayısıyla serinin logaritması alındıktan sonra daha önce gösterildiği şekilde boyutsuz hale getirilerek çarpıklık katsayısı -0.0711 olarak bulunmuş ve böylece serinin normal dağılıma uyduğu görülmüştür. Logaritması alınmış ve boyutsuz hale getirilmiş olan serinin otokorelasyon

katsayıları ile gecikme arasındaki değişimini gösterir korelogram Şekil 6'da verilmiştir. Şekil 7'de ise kısmi otokorelogram gösterilmektedir. Gerek korelogram gerek kısmi korelogram, büyük gecikme değerlerinde dahi %95 güven düzeyindeki güven aralığının ötesinde belirgin değerler vermektedir; ancak gecikme büyüdükçe otokorelasyon katsayıları da, kısmi otokorelasyon katsayıları da, mutlak değer olarak giderek azalmaktadır. Böyle bir süreç, ARMA(p,q) modelini önermektedir (Salas ve diğ., 1980; Hipel ve McLeod, 1994).



Şekil 6. Logaritması alınmış ve boyutsuz hale getirilmiş aylık akımların korelogramı.

Figure 6. Correlogram of logarithmized and deseasonalized monthly flows.



Şekil 7. Logaritması alınmış ve boyutsuz hale getirilmiş aylık akımların kısmi korelogramı.

Figure 7. Partial correlogram of logarithmized and deseasonalized monthly flows.

Şekil 6 ve 7 değişik biçimlerde yorumlanarak farklı potansiyel modeller saptanabilir. Şekil 7'deki kısmi otokorelasyon değerleri $k=2$ ve $k=3$ gecikme değerlerinde %95 güven düzeyindeki güven aralığının üst sınırına çok yakındır; bu iki değer (ve bunların ötesinde tüm belirgin değerler) ihmal edildiğinde AR(1), bu değerlerden sadece $k=3$ 'deki (ve bunların ötesinde tüm belirgin değerler) ihmal edildiğinde ise AR(2) modeli potansiyel model olarak önerilebilir. Öte yandan $k=3$ 'den ötedeki tüm belirgin değerler ihmal edildiğinde ise bir başka potansiyel model olarak, AR(3) önerilebilir.

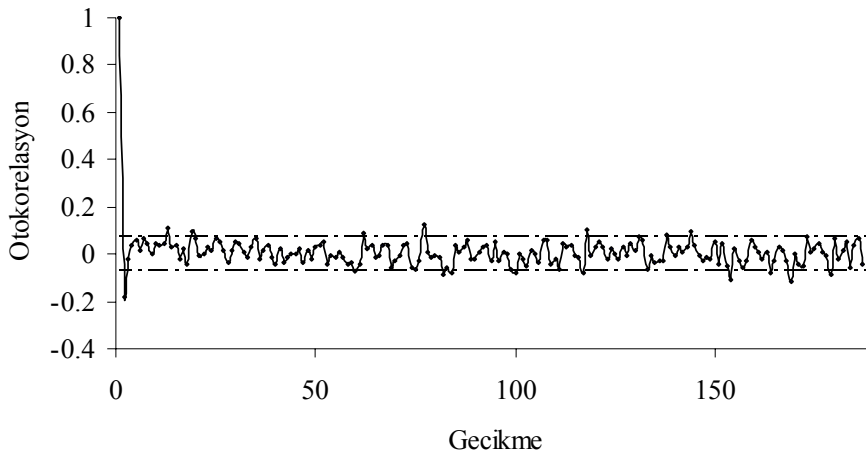
Model Parametrelerinin Belirlenmesi

Önerilen potansiyel modeller, AR(1), AR(2), AR(3), ARMA(1,1), için MATLAB programının System Identification Toolbox'ının armx fonksiyonu kullanılarak model parametreleri belirlenmiştir. Tablo 1'de söz konusu parametreler toplu olarak sunulmuştur.

Tablo 1. Potansiyel modellerin otoregresyon ve hareketli ortalama parametreleri.

Table 1. Autoregression and moving average parameters of competing models.

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ
AR(1)	0.7458	-	-	-
AR(2)	0.6231	0.1657	-	-
AR(3)	0.607	0.113	0.09388	-
ARMA(1,1)	0.8704	-	-	0.2861



Şekil 8. AR(1) modeline göre hesaplanan artıkların korelogramı.

Figure 8. Correlogram of residuals for the AR(1) model.

Modelin Denetlenmesi

İlk olarak, potansiyel modellerin, rasgele olması gereken artık serilerinin iç bağımlılıklarının olup olmadığı tahkik edilmiştir. Şekil 8-11 artık serilerin korelogramını sunmaktadır. Genellikle, modellerin artık serilerinin korelogramları belirgin otokorelasyon değerleri göstermektedir; sadece AR(1) modelinin artıkları %95 güven düzeyindeki güven aralığının belirgin ölçüde zorlamaktadır.

Akaike testi, birbiriyle yarışan modeller (önerilen potansiyel modeller) arasında bir seçim yapmak üzere kullanılır; minimum değeri veren model seçilir;

$$AIC = N \times \ln(\sigma_e^2) + 2 \times (p + q) \quad (3)$$

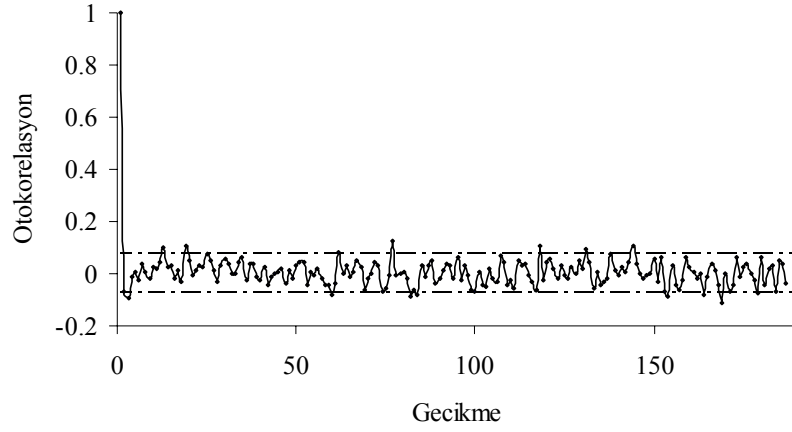
Burada, AIC Akaike bilgi kriteri, N toplam veri sayısı, p otoregresif modelin derecesini, q hareketli ortalama modelinin derecesini ve σ_e^2 artıklar serisinin varyansdır. Potansiyel modeller için bulunan AIC sayıları aşağıda gösterilmiştir:

$$AIC(1,0) = 744 \times \ln(0.514) + 2 \times 1 = -493.16$$

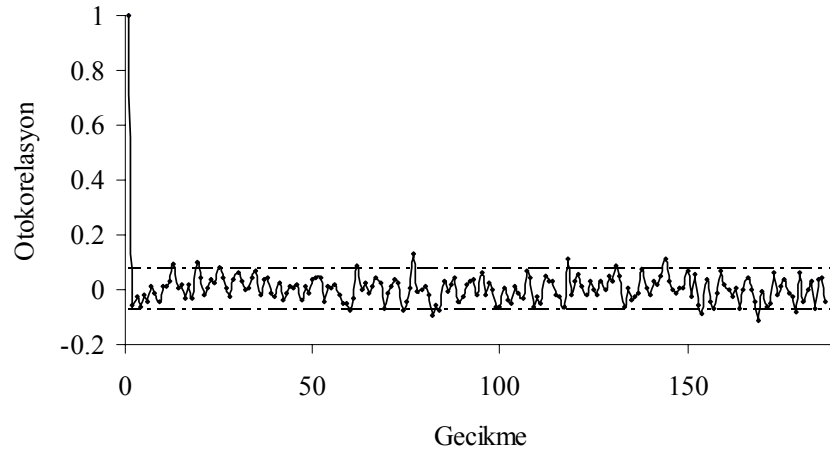
$$AIC(2,0) = 744 \times \ln(0.4963) + 2 \times 2 = -517.23$$

$$AIC(3,0) = 744 \times \ln(0.4923) + 2 \times 3 = -521.25$$

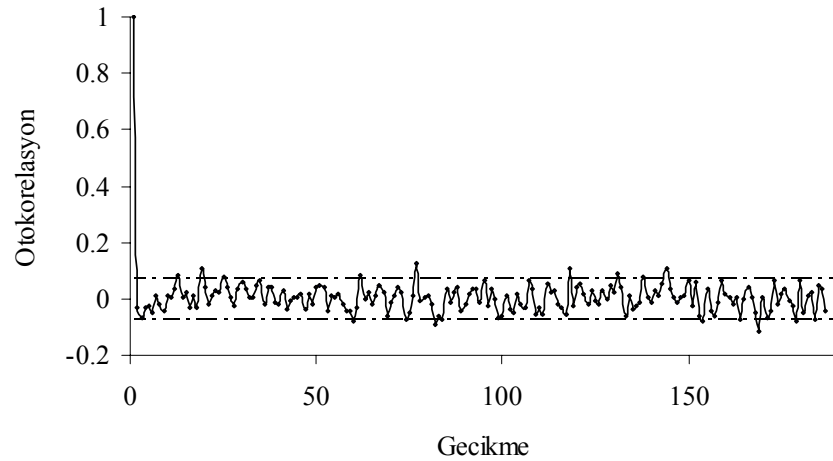
$$AIC(1,1) = 744 \times \ln(0.4926) + 2 \times 2 = -522.79$$



Şekil 9. AR(2) modeline göre hesaplanan artıkların korelogramı.
Figure 9. Correlogram of residuals for the AR(2) model.



Şekil 10. AR(3) modeline göre hesaplanan artıkların korelogramı.
Figure 10. Correlogram of residuals for the AR(3) model.



Şekil 11. ARMA(1,1) modeline göre hesaplanan artıkların korelogramı.
Figure 11. Correlogram of residuals for the ARMA(1,1) model.

Görüldüğü üzere en düşük AIC değerini ARMA(1,1) modeli vermiştir. Geleneksel olarak ARMA(1,1)'in nehir akımları modellerindeki yaygınlığı da göz önüne alınarak en gerçekçi model olarak seçilmiştir. Son olarak ARMA(1,1) modelinin geçerliliği Porte-Manteau testine göre tahkik edilmiştir. Hesaplanan

$$Q = N \sum_{k=1}^{N/10} [r_k(e_t)]^2 = 84.96 \text{ değeri, } \%95 \text{ güven}$$

düzeyinde $\chi^2(N/10-p-q) = 93.95$ göre daha düşük bulunmuştur; bu sonuç ARMA(1,1) modelinin geçerliliğini doğrulamaktadır.

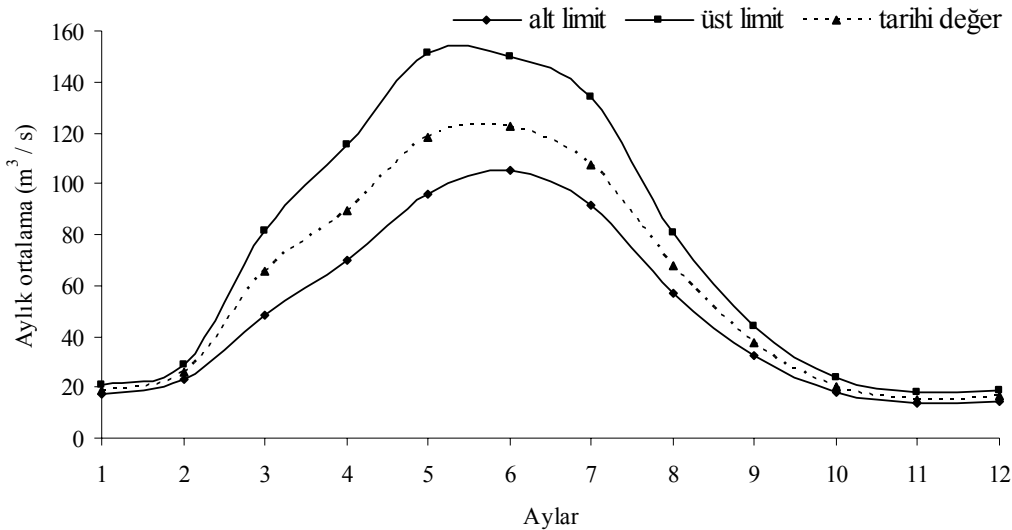
Sentetik Veri Türetilmesi

Sentetik veri türetilmesi çalışmasında 100 adet, orijinal seri uzunluğunda ($62 \times 12 = 744$), rasgele sayılardan oluşan seriler türetilmiştir; bu serilerin her birinin ortalaması sıfır, varyansı ise σ_e^2 'dir. (4) eşitliği ile, söz konusu rasgele

serilerin yardımıyla 100 adet boyutsuz seri elde edilmiştir.

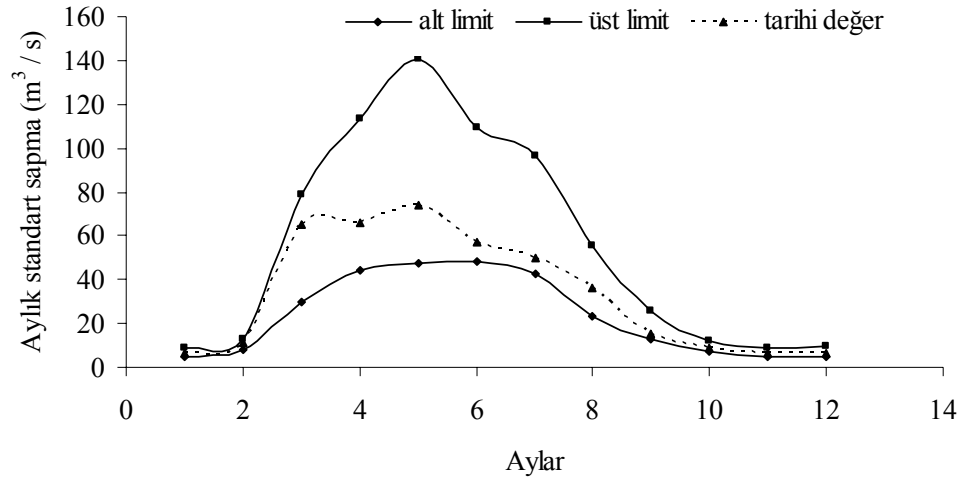
$$z_t = 0.8704 \times z_{t-1} - 0.2861 \times \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Boyutsuz serinin ters algoritmaları alındıktan sonra (2) numaralı eşitlik kullanılarak, orijinal seri (aylık ortalama akımlar) ile karşılaştırılabilir 100 sentetik veri elde edilmiştir. Bu sentetik serilerin istatistik değerlendirilmesi yapılmış ve %95 güven düzeyindeki güven aralıkları saptanmıştır. Aylık ortalamaların ortalamaları Şekil 12'de verilmiştir; tarihi (orijinal) serinin güvenilirlik aralığı içinde kaldığı görülmüştür. Benzer biçimde, aylık ortalamaların standart sapmaları Şekil 13'de verilmiştir; tarihi serinin yine güvenilirlik aralığı içinde kaldığı görülmüştür. Türetilen serilerle ilgili olarak ayrıca her sentetik serinin korelogramı saptanmıştır; istatistik değerlendirmeler sonucunda tarihi serinin korelogramı %95 güven düzeyindeki güven aralığı içinde kalmıştır (Şekil 14).



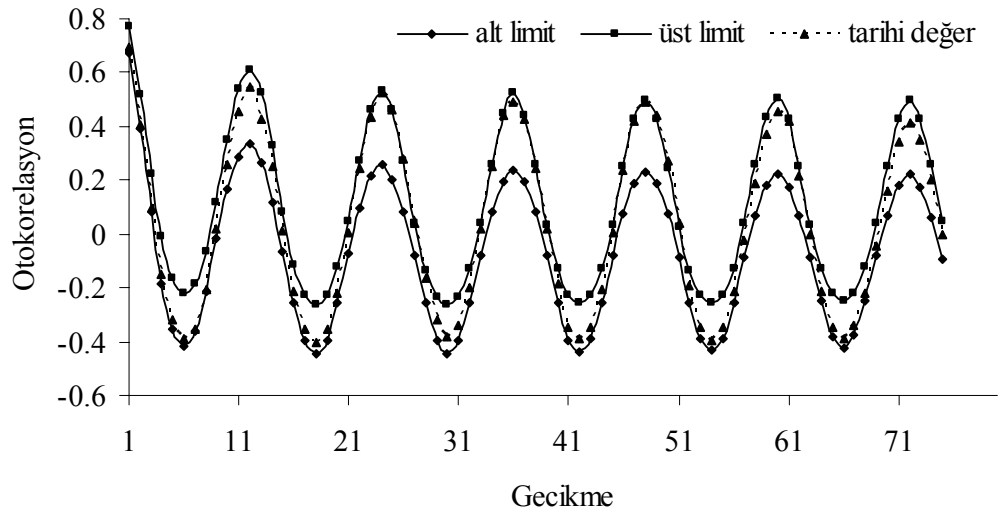
Şekil 12. Türetilen zaman serileri kullanılarak hesaplanan aylık ortalama akımların ortalamalarının değişimi (%95 güven aralığı ile).

Figure 12. Variation in mean for monthly flows which is calculated using generated time series (with 95% confidence interval).



Şekil 13. Türetilen zaman serileri kullanılarak hesaplanan aylık ortalama akımların standart sapmalarının değişimi (%95 güven aralığı ile).

Figure 13. Variation in standard deviation for monthly flows which is calculated using generated time series (with 95% confidence interval).



Şekil 14. Türetilen otokorelasyon değerlerinin tarihi değerlerle karşılaştırılması.

Figure 14. Comparison of generated and historical autocorrelations.

SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Susurluk havzasındaki, M. Kemal Paşa Çayı üzerinde bulunan 302 numaralı akım gözlem istasyonunda ölçülmüş bulunan aylık ortalama akımların stokastik modellemesi yapılmıştır. Elde edilen ARMA(1,1) modelinin otoregresif parametresi ($\Phi=0.8734$), hareketli ortalama parametresine, ($\theta=0.2861$) göre

oldukça yüksek bulunmuştur. Bu yüksek otoregresif parametre Susurluk havzasındaki yüzeysel akışta yeraltısuyu katkısının oldukça belirleyici olduğuna işaret etmektedir. Tarihi aylık akım serisinin, türetilen serilerin analizi sonucu elde edilen %95 güven düzeyindeki güven aralıkları içinde yer alması kurulmuş modelin geçerliliğini göstermektedir.

KAYNAKLAR

- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., 1970, *Time Series Analysis, Forecast and Control*, Holden-Day, San Fransisco, 598p.
- Bayazıt, M., 1981, *Hidrolojide İstatistik Yöntemler*, İTÜ, İstanbul, 223s.
- EİE Su Akımları Aylık Ortalamaları (1935-2000), 2003, Elektrik İşleri Etüt İdaresi Başkanlığı, Ankara.
- Hipel, K.W., McLeod, A.I., 1994, *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*, Elsevier, Amsterdam, 1013p.
- Karabörk, M.Ç., Kahya, E., 1999, Sakarya havzasındaki aylık akımların çok değişkenli stokastik modellenmesi, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, **23**, 2, 133-147.
- Merzi, N., Usul, N., Usul, G., 1995, Çoruh Havzası'nda Oltu Nehri'nin (2323 numaralı istasyonun) aylık akımlarının stokastik modellenmesi, *Teknik Dergi*, **6**, 4, 1049-1058.
- Salas, J.D., Delleur, J.W., Yevjevich, V., Lane, W.L., 1980, *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, Colorado, 484p.
- www.eie.gov.tr/turkce/hidroloji/03susurluk.html.