S.Ü. Müh.-Mim. Fak. Derg., c.27, s.3, 2012
J. Fac.Eng.Arch. Selcuk Univ., v.27, n.3, 2012
ISSN: 1300-5200, ISSN: 1304-8708 (Elektronik)

BÜTÜNLEŞİK ÜRETİM VE DAĞITIM PROBLEMLERİ İÇİN YENİ BİR ÇÖZÜM YAKLAŞIMI: MATEMATİKSEL MODELLEME

Saadettin Erhan KESEN[1]

[1]Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, KONYA
[1]skesen@selcuk.edu.tr

ÖZET: Üretim ve dağıtım faaliyetleri tedarik zinciri yönetiminde çok temel iki unsurdur. Literatürde bu iki problem genellikle birbirinden bağımsız olarak ele alınmaktadır. Ancak daha düşük sistem maliyeti için bu iki fonksiyonun bütünleşik olarak değerlendirilmesi gerektiği açıktır. Dolayısıyla kurumsal işletmeler sürdürülebilir rekabet için üretim ve dağıtım kararlarını birlikte almalıdır. Bu gereklilik üzerine son yıllarda üretim ve dağıtım problemlerinin entegre olarak ele alındığı çalışmalar artmaya başlamıştır. Bu çalışmada ilk olarak üretim problemi özdeş olmayan paralel makineler ortamına indirgenmiş ve bir matematiksel model önerilmiştir. Daha sonra dağıtım kararlarının verilmesinde araç rotalama problemi üzerinde durulmuş ve bir diğer matematiksel model geliştirilmiştir. Son olarak bu iki model temel alınarak üretim ve dağıtım problemlerini eş zamanlı çözen yeni bir model önerilmiş ve modelin geçerliliği örnek problem vasıtasıyla sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Çizelgeleme, Özdeş Olmayan Paralel Makineler, Araç Rotalama; Tedarik Zinciri*

A New Solution Approach to the Integrated Production and Distribution Problem: A Mathematical Modeling

ABSTRACT: Production and distribution activities are two basic elements in supply chain management. In literature, these problems are generally considered separately. However, it is clear that both activities have to be handled simultaneously in order to provide less system cost. Hence, enterprises are made their decisions concurrently with regard to production and distribution decisions for sustainable competitiveness. Based on this necessity, production and distribution problems have recently started to be studied together. In this paper, we first deal with production problems, reducing it to the unrelated parallel machine environment and a mathematical model is proposed. Then, we put an emphasis on the vehicle routing problem which is a strong connection with distribution decisions and develop another model. Finally, a new mathematical model formulation solving two integrated problems is developed and an illustrative example is given to validate the mathematical model.

Key Words: *Scheduling, Unrelated Parallel Machines, Vehicle Routing, Supply Chain*

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüzde rekabet ortamının artması firmaların pazarda tutunabilmesi için stratejik seviyeden operasyonel seviyeye tüm kararlarını sürekli gözden geçirmesine neden olmaktadır. Özellikle operasyonel seviyedeki birden fazla kararın eş zamanlı alınmasına yardımcı olacak bir karar destek mekanizmasının geliştirilmesi işletmenin sistem maliyetinin azaltılmasında önemli rol oynayacaktır. Bu kısa vadeli kararlar arasında üretimin payı hiç şüphesiz oldukça büyüktür. Üretim planlama faaliyeti gerçekleştirilirken işlerin hangi makinelerde üretileceği ve işlem zamanlarının ne zaman başlayacağı gibi çizelgeleme kararlarının alınması gerekmektedir. Bu sayede üretilecek işlerin makinelere tahsisi yapılacak ve üretim faaliyeti aksamadan gerçekleşecektir.

Üretim ve çizelgeleme kararlarına ek olarak üretilecek ürünlerin müşterilere teslimatlarının nasıl gerçekleştirileceği de diğer önemli bir noktadır. Teslimatın hangi müşteri sırasına göre yapılacağı, ne kadar araç kullanılacağı, araç kapasiteleri gibi kararlar bu aşamada verilecektir. Üretilen ürünlerin müşterilere hızlı bir şekilde teslimi müşteri memnuniyetini artırmakla birlikte maliyetlerin de azalmasına yardımcı olmaktadır (Düzakın ve Demircioğlu, 2009; Erdinç ve Ünlüakın, 2010).

Entegre üretim, hammaddeden nihai ürüne kadar tüm üretim süreçlerinde bir önceki aşamada üretilen malın bir sonraki aşamada girdi olarak kullanıldığı, diğer bir ifadeyle her bir üretim sürecinin birbirine bağlanarak bütün üretim aşamalarının aynı tesiste gerçekleştirildiği üretim olarak ifade edilebilir. Son yıllarda bazı işletmelerde özellikle bireysel üretimin olduğu ve müşteriye en hızlı şekilde teslimin yapılmasını sağlamak ve aynı zamanda maliyetleri indirgemek üzerine çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde çoğu uygulamada bu faaliyetler ayrı ayrı planlanmakta ve çoğu firma siparişin karşılanması üzerine üretimlerini yapmaktadır. Bu durumda gelen bir siparişin karşılanması için birlikte yapılan bir planlama son derece etkili olmaktadır ve firmanın özellikle zamanında teslimi konusunda etkili bir performans göstermesini sağlar.

Üretim ve dağıtım faaliyetlerinin eş zamanlı planlanması firmaya tedarik zincirinin yönetiminde büyük yararlar sağlamaktadır İlk olarak bu faaliyetlerin eş zamanlı planlanmasında, önceki planlamalar bir veri gibi firmaya yardımcı olmakta ve her üretim ve dağıtım planlaması sonraki planlamalara bir veri girdisi olarak dönüşmektedir. Ayrıca bu planlamalar teslim tarihlerinin bitiş tarihlerinin daha sağlıklı verilmesine olanak sağlamaktadır.

Başarılı bir sonuç elde etmek için bu iki fonksiyonun birlikte ele alınması ve yönetilmesi gerekmektedir. Bu durumun etkinliği son zamanlarda daha çok dikkat çekmektedir ve birbirlerine daha hızlı bir şekilde bağlanmaktadır. Üretim ve dağıtım operasyonlarının eş zamanlı planlanıp uygulanması maliyetlerde düşüşü ve müşteri memnuniyetinde artışı sağlayacaktır.

LİTERATÜR ARAŞTIRMASI (LITERATURE SURVEY)

Dinamik, küresel ve buna bağlı olarak rekabetçi bir ortamda karar-verme sürecini iyileştirmek için lojistik sistemindeki kaynaklar ve kullanımları üretim planlama ve kontrol sistemlerinde daha yakından incelenmelidir. Aşağıda üretim ve dağıtım kararlarının alınmasıyla ilgili çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Literatür araştırmasının kapsamı özdeş olmayan paralel makineler ve araç rotalama problemleri ile sınırlandırılmıştır.

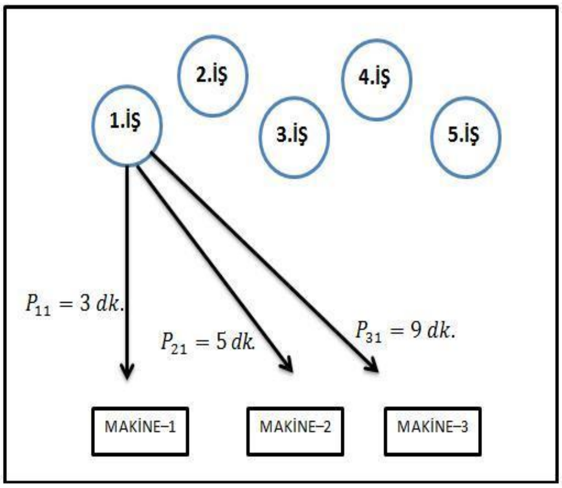
Liaw ve ark. (2001) özdeş olmayan paralel makinelerde toplam ağırlıklı gecikmeyi minimum yapacak şekilde bir çizelgeleme oluşturmayı amaçlamışlardır. Bu NP–Zor düzeydeki problem için dal sınır algoritması uygulamışlar ve çözüm aralığı olarak alt ve üst sınır bulmuşlardır. Mokotoff ve Chretienne (2000) $R_m//C_{max}$ problemi için özdeş olmayan paralel makinelerde çizelgeleme için kesme algoritmasını uygulamışlar sonrasında buldukları çözümleri yaklaşık algoritmalar ile desteklemişlerdir. Özdeş olmayan paralel makinelerde çizelgeleme için çeşitli sezgisel modeller de geliştirilmiştir. Li ve Yang (2008) yaptıkları çalışmalar ile tamamlanma süresini minimum yapmak için, Chen (2005)'in yaptığı ve Rabadi ve ark. (2006) yaptıkları çalışmalarda sezgisel yöntemler kullanmışlardır. Pinedo (2008) ve Peyro ve Ruiz (2011) ise yaptıkları çalışmalarda özdeş olmayan makinelerde çizelgeleme üzerine çeşitli araştırmalar yapmışlardır. Rocha ve ark. (2006) özdeş olmayan makinelerin hazırlık sürelerini de dikkate alarak oluşturdukları tam sayılı programlama modelini CPLEX 9.0 ile çözmüşlerdir. Daha sonra dal–sınır algoritması ile problemi farklı şekilde incelemişler ve elde ettikleri sonuçları karşılaştırmışlardır. Martello ve ark. (1996) özdeş olmayan makinelerde yayılım zamanını minimum yapmak için problem üzerinde bazı gevşetmeler yaparak yaklaşık algoritmalar ile çözüm geliştirmişlerdir.

Dağıtım ise diğer önemli bir planlama faaliyeti olmakla birlikte burada dağıtım operasyonu ile yakından ilişkili araç rotalama üzerinde durulacaktır. Araç rotalama problemi temel olarak toplam taşıma zamanı ya da toplam uzaklık vb. bir amacı en iyileyerek tüm müşteri taleplerini mevcut araç filosu ve kapasitesiyle gerçekleştirilmesidir. Düzakın ve Demircioğlu (2009) araç rotalama probleminin çeşitli tipleri için tam sayılı programlama modeli geliştirmiştir. Kara ve Derya (2010) ve Demircioğlu (2009) yaptıkları çalışmalarda sezgisel yöntemler kullanarak araç rotalama problemi üzerine çalışmışlardır. Eryavuz ve Gencer (2001), Erdinç ve Ünlüakın (2010) oluşturdukları matematiksel modeller ile araç rotalama problemi üzerine çözümler üretmişlerdir. Baker ve Ayechew (2003) araç rotalama probleminde genetik algoritmayı kullanmışlardır. Laporte (1992) ise araştırmaları sonucunda kesin ve sezgisel olmak üzere iki tip model geliştirerek araç rotalama probleminin çözümüne katkıda bulunmuştur. Golden ve ark. (2008) farklı araç rotalama problemi üzerinde çözümler üretmiş, çeşitli yaklaşımlar sunmuşlardır.

Bu çalışmada iki önemli planlama faaliyetinin etkin bir şekilde eş zamanlı olarak gerçekleştirilmesini içermektedir. Özellikle son zamanlarda önemi artan ve IPODS (Integrated Production and Outbound Distribution Scheduling) olarak isimlendirilen bu planlama faaliyeti rekabet ortamında firmalara büyük bir avantaj sağlamaktadır. Çalışma içinde üretim ve dağıtım kararları için ayrı matematiksel modeller geliştirilmiş, sonrasında bu modeller birleştirilerek üretimin ve dağıtımın birlikte planlanması sağlanmıştır.

ÖZDEŞ OLMAYAN PARALEL MAKİNELER (UNRELATED PARALLEL MACHINES)

Aynı işi yapan *m* adet paralel makinenin bulunduğu üretim ortamına özdeş olmayan paralel makine denir. *i* makinesi *j* işini v_{ij} hızıyla işlemektedir. *j* işinin *i* makinesindeki işlem zamanı olan P_{ij}, P_j/v_{ij} değerine eşittir. Yani her bir işin her bir makinedeki işlem zamanı birbirinden faklı olabilmektedir. Şekil 1'de 5 farklı iş ve 3 adet özdeş olmayan paralel makine görülmektedir. Böyle bir durumda işler her makinede farklı sürelere sahip olabilir (Örneğin 1. işin işlem süresinin, 1. makinede 3 dk., 2.makinede 5 dk., 3. makinede 9 dk. olması gibi).



Şekil 1 Özdeş olmayan parallel makinalar
(Unrelated parallel machines)

Özdeş olmayan paralel makine problemine polinomial zamanda optimum çözüm verecek bir algoritma olmadığı için bu problem NP-zor problem grubuna dahil edilmektedir (Pinedo, 2008).

En küçüklenmek istenen amaç toplam işlem zamanı olabilirken, bazen toplam bekleme zamanının en küçüklenmek istenebilir (Rabadi ve ark., 2006). Bu bakımdan çizelgeleme problemleri çözümünde kullanılmak üzere belli başlı performans ölçütleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada, özdeş olmayan paralel makinelerde işlerin etkin bir şekilde atanmasını sağlayarak tüketici taleplerinin karşılanması için matematiksel model geliştirilmiştir.

Problem, $Rm//C_{max}$ şeklinde ifade edilmektedir. Yani, *m* adet özdeş olmayan paralel makine bulunmakta ve amaç fonksiyonumuz maksimum tamamlanma süresini minimum yapmaktır. Literatürde konu üzerine birçok araştırma yapılmış ve çeşitli matematiksel modeller geliştirilmiştir. Problemimiz için matematiksel model oluştururken dikkate alınan varsayımlar şunlardır;

- Makineler hız bakımından birbirinden farklıdır,
- Tüm makineler ve işler sıfır zamanında kullanıma hazırdır,
- Bir makine aynı anda tek bir işi işleyebilir,
- Bir işe başlandıktan sonra o iş bölünmeksizin veya başka bir makineye aktarılmaksızın işlenmelidir,

- Bir iş en fazla bir makinede işlenebilir,
- İş ile ilgili parametreler (işlem zamanları vb.) ve makine sayısı kesin olarak bilinmektedir,
- İşler arasında öncelik sırası yoktur.

Matematiksel model ve modelde kullanılan indisler, parametreler ve karar değişkenleri şu şekildedir;

i : Makineler
j : İşler
k : Pozisyon sırası.

Parametreler;
P_{ij} : j işinin i makinesindeki işlem süresi.

Karar değişkenleri;

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j \text{ işi } i \text{ makinenin } k. \text{ pozisyona atanırsa} \\ 0, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

t_{ik} :i makinesinde k. sıradaki işin işleme başlama zamanı,
C_{max} :Son işin sistemi terk ettiği zaman.

Amaç fonksiyonu,

$$Min\ Z = C_{max} \tag{1}$$

Kısıtlar

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} \leq 1 \qquad k = 1, \ldots k;\ \ i = 1, \ldots, m \tag{3}$$

$$C_{max} \geq t_{ik} + P_{ij}X_{ijk} \qquad k = 1, \ldots, k;\ \ i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$t_{ik} \geq t_{i(k-1)} + P_{ij}X_{ij(k-1)} \qquad k = 1, \ldots k;\ \ i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

$$X_{ijk} = \{0,1\},\ t_{ik} \geq 0,\ C_{max} \geq 0 \tag{6}$$

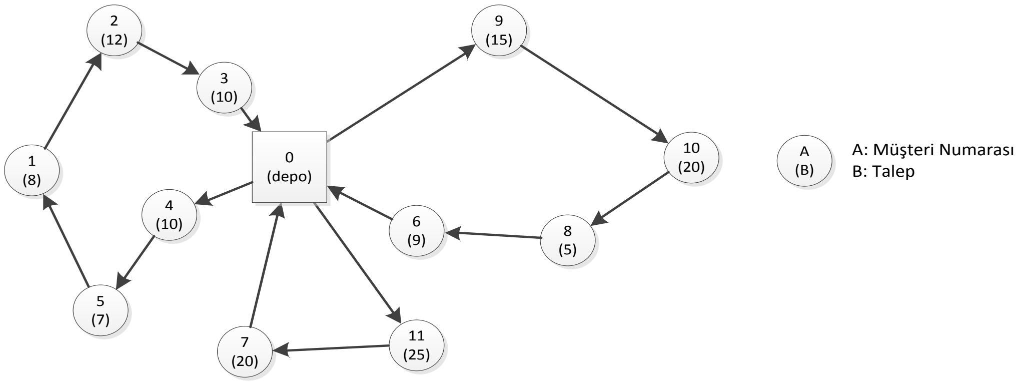
Eş. (1)'deki amaç fonksiyonu en son işin tamamlanma zamanının en küçüklenmesidir. (2) numaralı kısıt bir işin herhangi bir makinenin herhangi bir pozisyonunda işlenmesi gerektiğini belirtirken, (3) numaralı kısıt bir makinenin herhangi bir pozisyonuna en fazla bir işin atanabileceğini göstermektedir. (4) numaralı kısıt en son işin tamamlanma zamanının tüm işlerin tamamlanma zamanından büyük ya da eşit olması gerektiğini ve (5) numaralı kısıt bir makinedeki herhangi bir pozisyondaki işin başlayabilmesi için bir önceki pozisyondaki işin tamamlanması gerektiğini göstermektedir. Kısıt (6) ise karar değişkenlerine ait işaret kısıtıdır.

ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİ (VEHICLE ROUTING PROBLEM)

Üretilen ürünlerin müşterilere zamanında, gerektiği şekilde ve minimum maliyet/zamanla teslim edilmesi üretim ve dağıtım problemlerinin eş zamanlı incelenmesinde diğer bir problemdir. Dağıtım problemi araç rotalama problemi olarak ele alınmıştır.

İlk olarak 1959 yılında ortaya atılan araç rotalama problemi (ARP) temel olarak mevcut araç filosuyla birden fazla müşteriye ürünlerin teslimatını ne şekilde yapılacağını belirleyen bir kombinatoriyel optimizasyon problemidir.

Literatürde ARP'nin bir çok varyasyonu olmasına rağmen bu makalede ARP tanımı kısaca şu şekilde yapılmıştır. N adet müşteri (1,…N) ve 1 adet depodan oluşan bir şebekede tüm düğüm çiftleri arasındaki süreler (c_{ij}) bilinmektedir. Her müşterinin bir talebi (d_i) vardır. Sonsuz sayıda ve sabit bir kapasiteye (Q) sahip araçlar depoda hazır olarak beklemektedir. ARP'de amaç en düşük sürede tüm müşterilere hizmet verilen rotaları oluşturmaktır. Şekil 2'de, Q=50 için 11 müşterilik bir ARP problemine ait şebeke gösterimi verilmiştir.



Şekil 2 Araç rotalama probleminin şebeke gösterimi
(Network representation of vehicle routing problem)

ARP'nin çözümü için önerilen basit bir sezgisel yöntemde, ARP çözümü düğümlerin bir sırası ile tutulmaktadır (yukarıdaki örnek için {4,5,1,2,3,9,10,8,6,11,7} gibi). Bu çözümün süresi hesaplanırken önce rotalar ayrıştırılır. Rota ayrıştırma işleminde, araç kapasitesi aşılmadığı sürece müşteriler gruplanır. Kapasite aşıldığında yeni bir rota oluşturulur. Yukarıdaki örnek için {4,5,1,2,3 ❘ 9,10,8,6 ❘ 11,7} şeklinde 3 rota elde edilir. Sonraki adımda ise her bir rotanın maliyeti hesaplanır. Maliyet hesaplamasında ise her bir rotanın başına ve sonuna depo düğümü eklenir ve bağlantıların süreleri toplanır. Yukarıdaki örnek için {0,4,5,1,2,3,0 ❘ 0,9,10,8,6,0 ❘ 0,11,7,0} şeklinde rotalar düzenlenir ve

$$Süre = c_{0,4} + c_{4,5} \ldots + c_{3,0} + c_{0,9} + \ldots + c_{6,0} + c_{0,11} + c_{7,0}$$

şeklinde maliyet hesaplanır.

ARP, NP-zor problem sınıfında olduğu literatürde ispatlanmıştır yani makul bir zamanda probleme optimal çözüm veren bir algoritma bulunamamıştır. Küçük boyutlu problemlerde tamsayılı programlama, dal ve sınır algoritması vb. teknikler optimum çözüm verirken büyük boyutlu problemlerde sezgisel ve meta-sezgisel teknikler uygulanmaktadır. Makalede ARP için bir tamsayılı programlama modeli geliştirilmiştir. Model tanımı aşağıdaki gibidir.

Probleme ilişkin varsayımlar:

- Bir depo mevcuttur,
- Depoda homojen araç filosu bulunmaktadır. Araçlar depoda park halindedir,
- Araç rotalarının başlangıç ve bitiş düğümü depodur,
- Her müşteriye sadece tek bir araç tarafından hizmet verilmektedir,
- Her aracın kapasitesi aynıdır ve her araç tek bir tur yapmaktadır,
- Gidilen toplam uzaklıkta bir aracın kapasitesi aşılamamaktadır,
- ARP'de amaç, tüm araçlar tarafından kat edilecek toplam zamanın minimize edilmesidir.

ARP'nin sonuçları bir maliyet değerleme aracı olarak stratejik amaçlarla kullanılabilmektedir. Böyle bir çalışma için ilk önce müşteri talepleri ile ilgili bilgiler elde edilmekte, sonra bu bilgilere dayanılarak uygun dağıtım programının belirlenmesi sağlanmaktadır.
Yukarıdaki varsayımları dikkate alarak ARP için geliştirilen matematiksel model ve modelde kullanılan indisler, notasyonlar, parametreler ve karar değişkenleri şu şekildedir;

i, j : Düğümleri göstermektedir (Depo dahil.)

Notasyonlar;
N_c : Müşteri düğümleri kümesi,
D : Depo düğümü,
N : Düğümler kümesi. $(N = N_c \cup D)$

Parametreler;
C_{ij} : i düğümden j düğüme olan zaman,
Q : Araç kapasitesi,
d_i : i düğümün talebi.

Karar değişkenleri;

$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \text{ düğümünden } j \text{ düğümüne gidiş varsa} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

u_i aracın i düğümüne kadar dağıttığı toplam yük miktarı

Amaç fonksiyonu;

$$Min\ Z = \sum_i \sum_j C_{ij}\ X_{ij} \quad \forall\, i,j \in N, i \neq j \tag{7}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i \in N} X_{ij} = 1 \quad \forall\, j \in N_C \tag{8}$$

$$\sum_{j \in N} X_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in N_C \tag{9}$$

$$\sum X_{i0} = \sum X_{0j} \quad \forall\, i,j \in N_C,\ i \neq j \tag{10}$$

$$u_i - u_j + QX_{ij} \leq Q - d_j \quad \forall\, i,j \in N_C,\ i \neq j \tag{11}$$

$$d_i \leq u_i \leq Q \quad \forall\, i \in N_c \tag{12}$$

$$X_{ij} = \{0,1\},\ u_i, u_j \geq 0 \tag{13}$$

Modelde, Eş. (7)'de verilen amaç fonksiyonu toplam taşıma süresini minimum yapmaktır. Kısıt (8) ve Kısıt (9) sırasıyla her bir düğüme bir adet giriş ve her bir düğümden sadece bir adet çıkış olmasını sağlamaktadır. Kısıt (10) depodan çıkan ve depoya giren araç sayısının birbirine eşit olması gerektiğini göstermektedir. Kısıt (11) alt tur eleme kısıtıdır. Kısıt (12) her bir turda i düğümüne kadar dağıtılan ürün miktarının i düğümünün talebi ile araç kapasitesi arasında olması gerektiğini göstermektedir. Kısıt (13) modeldeki karar değişkenlerine ilişkin işaret kısıtlarıdır.

Optimal üretim ve dağıtım kararlarının birbirlerinden bağımsız olarak verilmesi toplam sistem maliyeti açısından minimum değeri vermeyebilir. Yukarıda üretim ve dağıtım problemlerine ilişkin matematiksel modeller verildi. Burada bu iki model kullanılarak tek bir model elde edilecek ve eş zamanlı üretim ve dağıtım karalarının alınması sağlanacaktır.

Yukarıdaki modellerdeki varsayımlar yeni model içinde geçerlidir. Ek olarak aşağıdaki varsayımlar eklenecektir;

- Makineler hız bakımından birbirinden farklıdır,
- Bütün düğümlerin talepleri ve bu taleplerin hangi ürünlere ilişkin olduğu ayrı ayrı bilinmektedir (Örneğin, 1. düğümün talebi sadece 2. ve 4. ürünlerden oluşmaktadır.),
- Tüm ürünler özdeş kutularda taşınmaktadır. Yani bütün ürünlerin araç içinde kapladıkların alan, hacim sabittir.

Bu varsayımlar dikkate alındığında modelle kullanılan indisler, notasyonlar, parametreler ve karar değişkenleri aşağıdaki gibidir;

i : Makinelerin kümesini göstermektedir.
j : İşlerin kümesini göstermektedir.
k : Pozisyon sırası.
z,l : Düğüm sayısı (Depo dahil).

Notasyonlar;
N_c : Müşteri düğümleri kümesi,
D : Depo düğümü,
N : Düğümler kümesi $N = (N_C \cup D)$

Parametreler;
TT_{zj} : z düğümünden j düğümüne seyahat süresi,
d_z : z düğümünün toplam talep miktarı,
n_{zj} : z düğümünün j ürünü için talep miktarı,
S_j : j ürünü için üretilecek partinin hacmi,
PT_{ji} : j ürününün (birim) i makinesindeki işlem süresi,
Q : Araç kapasitesi.

Karar değişkenleri,

$X_{ijk} = \begin{cases} 1, & j \text{ işi } i \text{ makinesinin } k. \text{ pozisyonunda işlem görüyorsa} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \text{ düğümünden } j \text{ düğümüne gidiş varsa} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

t_{ik} : i makinesinde k. pozisyondaki işin başlama zamanı,
C_{max} : En son işin tamamlanma zamanı.
u_z :aracın z düğümüne kadar dağıttığı toplam yük miktarı

Amaç fonksiyonu;

$Min\ Z = C_{max} + \sum_z \sum_l C_{zl} y_{zl} \quad \forall\, z,l \in N, z \neq l$ (14)

Kısıtlar,

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} = 1 \quad \forall\, j$ (15)

$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} \leq 1 \quad \forall\, i,k$ (16)

$S_j = \sum_z n_{zj} \quad \forall\, j$ (17)

$C_{max} = t_{ik} + PT_{ji} S_j X_{ij(k-1)} \quad \forall\, i,j,k$ (18)

$t_{ik} \geq t_{i(k-1)} + PT_{ji} S_j X_{ij(k-1)} \quad \forall\, i,j,k$ (19)

$\sum_l Y_{zl} = 1 \quad \forall\, z \in N_c$ (20)

$\sum_z Y_{zl} = 1 \quad \forall\, l \in N_c$ (21)

$\sum Y_{z0} = \sum Y_{0l} \quad \forall\, z,l \in N_c, z \neq l$ (22)

$u_z - u_l + QY_{zl} \leq Q - d_l \quad \forall\, z,l \in N_c, z \neq l$ (23)

$d_l \leq u_z \leq Q \quad \forall\, z \in N_c$ (24)

$X_{ijk}, Y_{zl} \in \{0,1\},\ u_z,\ u_l,\ t_{ik} \geq 0$ (25)

Eş. (14)'deki amaç ürünlerin üretilmesi ve dağıtılması için gerekli toplam zamanın minimum yapılmasıdır. (15) numaralı kısıt, her bir işin muhakkak bir işin bir pozisyonuna atanması gerektiğini göstermektedir. Kısıt (16), bir makinenin herhangi bir pozisyonuna en fazla bir iş atanabileceğini ifade etmektedir. Kısıt (17), düğümlerde ki talepler doğrultusunda hangi ürün kalemine kaç adet talep olduğunu hesaplamaktadır. Kısıt (18), üretim tamamlanma zamanının bütün işlerin tamamlanma zamanından büyük olması gerektiğini söylemektedir. Kısıt (19), herhangi bir makinenin bir pozisyonundaki işin başlayabilmesi için daha önceki pozisyondaki işin tamamlanması gerektiğini ifade etmektedir. Kısıt (20) ve Kısıt (21) sırasıyla her bir düğüme bir adet giriş ve çıkış yapılacağını göstermektedir. Kısıt (22) depodan çıkan ve depoya giren araç sayılarının eşit olması gerektiğini gösterir. Kısıt (23) alt tur eleme kısıtıdır. Kısıt (24) her bir turda *z* düğümüne kadar dağıtılan ürün miktarının *z* düğümünün talebi ile araç kapasitesi arasında olması gerektiğini göstermektedir. Kısıt (25) işaret kısıtlarıdır.

ÖRNEK PROBLEM (ILLUSTRATIVE EXAMPLE)

Yukarıda geliştirilen matematiksel modelin doğruluğunu test etmek için kurgusal bir problem geliştirilmiştir. Bir firma belirli sayıda iş üretmekte ve sonrasında ürettiği ürünleri müşterilerine dağıtım kanalları vasıtasıyla ulaştırmaktadır. Bu firmanın ürettiği 5 çeşit ürün ürettiğini ve bu ürünlere talebi olan 6 adet müşteri olduğunu düşünelim.

Ürünler tek bir operasyondan geçmektedir ve bu operasyonu gerçekleştirecek üretim hızları parçadan parçaya farklılık gösteren 3 adet makine bulunmaktadır. Ürünlerin her bir makinedeki birim işlem süreleri Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1 Ürünlerin makinelerdeki işlem süreleri
(Processing times of jobs on machines)

Ürün Çeşidi	Makine 1	Makine 2	Makine 3
1.Ürün	4 dk.	2 dk.	8 dk.
2.Ürün	3 dk.	2 dk.	2 dk.
3.Ürün	6 dk.	4 dk.	1 dk.
4.Ürün	3 dk.	3 dk.	2 dk.
5.Ürün	1 dk.	4 dk.	3 dk.

Firma üretmiş olduğu ürünlerin satış noktalarına sevkiyatını kendi araç filosu ile sağlamaktadır. Müşteri çiftleri arasındaki uzaklık matrisi Çizelge 2'de verilmektedir.

Çizelge 2. Müşteri çiftleri seyahat süreleri (dk. olarak)

(Traveling times between customer pairs (in minutes))

Düğümler	Depo	1. Müşteri	2. Müşteri	3. Müşteri	4. Müşteri	5. Müşteri	6. Müşteri
Depo	0	5	7	3	1	9	10
1. Müşteri	5	0	10	7	9	13	2
2. Müşteri	7	10	0	6	7	8	5
3. Müşteri	3	7	6	0	2	4	1
4. Müşteri	1	9	7	2	0	7	10
5. Müşteri	9	13	8	4	7	0	3
6. Müşteri	10	2	5	1	10	3	0

Ayrıca düğümlerin talepleri sırasıyla 9, 8, 8, 15, 10 ve 20 birimdir. Bununla birlikte düğümlerdeki taleplerin hangi ürünler için olduğu aşağıdaki Çizelge 3'de verilmiştir. Araç sayısının yeterince büyük ve her birinin kapasitesinin birbirine eşit ve 50 br. olduğu kabul edilmektedir.

Çizelge 3 Her bir ürüne olan müşteri talepleri

(Customer demands for each type of product)

Ürün Çeşitleri	1.Müşteri	2. Müşteri	3. Müşteri	4. Müşteri	5. Müşteri	6. Müşteri
1.Ürün	4	-	-	-	-	6
2.Ürün	5	-	-	-	10	-
3.Ürün	-	-	4	7	-	-
4.Ürün	-	8	-	8	-	-
5.Ürün	-	-	4	-	-	14

Bu verilere göre geliştirilen matematiksel model GAMS 22.5 optimizasyon paket programında Cplex çözücüsü kullanılarak çözülmüştür (Program kodları için Ek açıklamalara bakınız.). Elde edilen sonuçlar Çizelge 4'de verilmiştir.

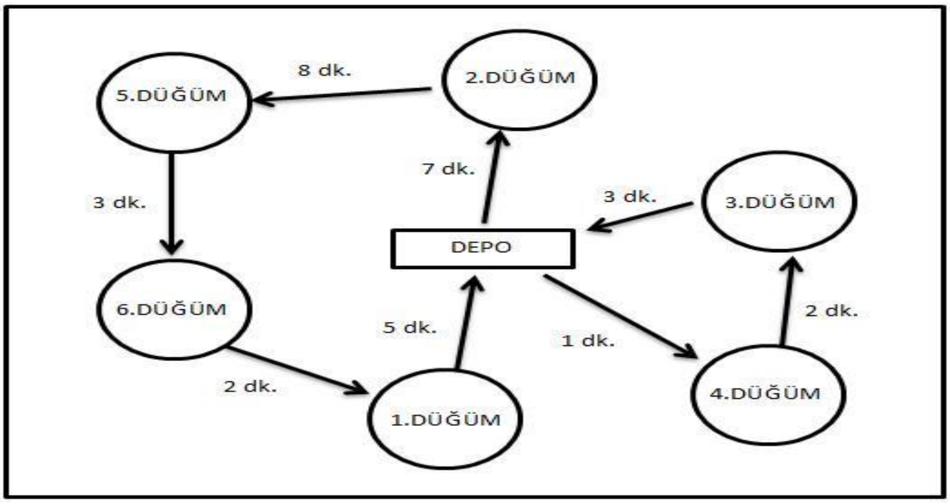
Üretim planı; 1. ürün, 2. makinenin dördüncü pozisyonuna; 2.ürün, 2.makinenin birinci pozisyonuna; 3.ürün, 3.makinenin beşinci pozisyonuna; 4.ürün, 3.makinenin birinci pozisyonuna; 5.ürün, 1.makinenin üçüncü pozisyonuna atanacak şekilde olacaktır.

Çizelge 4 Örnek problem için optimal çizelge

(Optimal schedule for illustrative example)

Makineler	1.Pozisyon	2.Pozisyon	3.Pozisyon	4.Pozisyon	5.Pozisyon
1.Makine	-	-	5.Ürün	-	-
2.Makine	2.Ürün	-	-	1. Ürün	-
3.Makine	4.Ürün	-	-	-	3.Ürün

Dağıtım planında iki adet araç fabrikadan ayrılacak ve bu araçlar bir tanesi 2.düğüme diğeri ise 4.düğüme gidecektir. Daha sonrasında araçlardan bir tanesi için rota; 2.düğümden 5.düğüme, 5.düğümden 6.düğüme, 6.düğümden 1.düğüme ve 1.düğümden depoya dönüş şeklinde olacaktır. Diğer araç için; 4.düğümden 3.düğüme ve 3.düğümden depoya dönüş şeklinde olacaktır. Şekil 3'de rota planı görülmektedir.



Şekil 3 Örnek problem için optimal dağıtım politikası
(Optimal distribution policy for illustrative example)

Elde edilen sonuçlar neticesinde, toplam üretim zamanı 50 dk. ve toplam dağıtım süresi ise 31 dk. olarak bulunmuştur. Sonuç olarak toplam süre 81 dk. olmaktadır.

SONUÇ ve TARTIŞMALAR (RESULTS and DISCUSSIONS)

Tedarik zinciri yönetiminde şüphesiz üretim ve dağıtım kararlarının ne şekilde alındığı önemli bir rol oynamaktadır. Tek üreticinin ve birden fazla dağıtım noktasının olduğu bir tedarik zinciri ağ yapısında üretim ve dağıtım kararlarının birlikte alındığı durum incelenmiştir. Üretim ortamı tek bir operasyonun yapıldığı ve bu işlemi yapacak kabiliyette birden fazla özdeş olmayan paralel makine ortamı şeklinde tanımlanmıştır. Dağıtım problemi kapasite kısıtlı yeterli sayıda aracın bulunduğu araç rotalama problemi olarak tanımlanmıştır. Bu iki operasyonel seviye kararı birlikte ele alabilmemize olanak sağlayan bir matematiksel model geliştirilmiştir. Modelin uygulanabilirliği örnek olay yardımıyla test edilmiştir.

Gelecek çalışmalarda akış tipi ya da atölye tipi gibi daha üst seviye üretim ortamları incelenebilir. Bu tip ortamlar için sezgisel ve meta sezgisel çözüm tekniklerinin performansı incelenebilir. Ayrıca dal-sınır veya dal-kesme gibi kesin çözüm algoritmaların problem üzerindeki etkinlikleri de incelenebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

Golden, B., Raghavan, S., Wasil, E., 2008, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, Volume 43, Springer, A.B.D.

Chen, J.-F., 2005, "Unrelated Parallel Machine Scheduling with Secondary Resource Constraints", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 285-292.

Demircioğlu, M., 2009, "Araç rotalama probleminin sezgisel bir yaklaşım ile çözümlenmesi üzerine bir uygulama", Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Düzakın, E., Demircioğlu, M., 2009, "Araç Rotalama Problemleri ve Çözüm Yöntemleri", *Çukurova Üniversitesi İİBF Dergisi*, Vol. 13, No. 1, pp. 29-45.

Erdinç, S.S., Ünlüakın, D.Ö., 2010, *Bir Lojistik Şirketinin Araç Rotalama Problemi İçin Bir Matematiksel Model*, http://people.sabanciuniv.edu/.../04-C6-.pptx, ziyaret tarihi: 14 Haziran 2012.

Eryavuz, M., Gencer, C., 2001, "Araç rotalama problemine ait bir uygulama", *Süleyman Demirel Üniversitesi, iktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi*, Vol. 6, No. 1, pp. 139-155.

Kara, İ., Derya, T., 2010, "Mesafe Kısıtlı Araç Rotalama Problemi İçin Doğrusal Programlama Tabanlı Sezgisel Bir Yöntem", *Yöneylem Araştırması / Endüstri Mühendisliği XXVI.Ulusal Kongresi*, Başkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü, Ankara, 3-5 Temmuz 2006.
Laporte, G.,. 1992 "The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms", *European Journal of Operational Research*, Vol. 59, pp.345-358.
Li, K., Yang, S.-L., 2009. "Non-identical Parallel-Machine Scheduling Research with Minimizing Total Weighted Completion Times: Models, Relaxations and Algorithms", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, No. 4, pp. 2145-2158.
Liaw, C.-F., Lin, Y.-K., Cheng, C.-Y., Chen, M., 2003, "Scheduling Unrelated Parallel Machines to Minimize Total Weighted Tardiness", *Computers and Operations Research*, Vol. 30, No. 12, pp. 1777-1789.
Martello, S., Soumis, F., Toth, P., 1996, "Exact and Approximation Algorithms for Makespan Minimization on Unrelated Parallel Machines", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 75, pp. 169-188.
Mokotoff, E., Chretienne, P., 2000, "A Cutting Plane Algorithm for the Unrelated Parallel Machine Scheduling Problem", *European Journal of Operational Research*, Vol. 141, No. 3, pp. 515-525.
Pinedo, M.L., 2008, "Scheduling Theory, Algorithms, and Systems", Springer, New York, USA.
Rocha, P.L., Ravetti, M.G., Mateus, G.R., Pardalos, P.M., 2008, "Exact Algorithms for a Scheduling Problem with Unrelated Parallel Machines and Sequence and Machine-dependent Setup Times", *Computers and Operations Research*, Vol. 35, No. 4, pp. 1250-1264.
Rabadi, G., Moraga, R.J., Al-Salem, A., 2006, "Heuristics for the Unrelated Parallel Machine Scheduling Problem with Setup Times", *Journal of Intelligent Manufacturing*, Vol. 17, No. 1 pp. 85-97.
Baker B.M., Ayechew, M.A., 2003. "A Genetic Algorithm for the Vehicle Routing Problem", *Computers and Operations Research*, Vol. 30, No. 5, pp. 787-800.
Peyro, F., Ruiz, R., 2011, "Scheduling Unrelated Parallel Machines with Optional Machines and Jobs Selection", *Computers and Operations Research*, Vol. 39, No. 7, pp. 1745-1753.

EK AÇIKLAMALAR (APPENDIX)

Bütünleşik Üretim ve Dağıtım Problemi için Geliştirilen Matematiksel Modelin GAMS paket programına ilişkin kodları

```
Sets
i makina kümesi /i-1*i-3/
j iş seti /j-1*j-5/
k pozisyon sayısı /k-1*k-5/
z düğüm sayısı /z-0*z-6/
alias (k,kp);
alias (z,l);
scalar Q araç kapasitesi /50/;
PARAMETERS PT(j,i) her bir işin her bir makinadaki işlem zamanı
/
j-1.i-1    4
j-1.i-2    2
j-1.i-3    8
j-2.i-1    3
j-2.i-2    2
j-2.i-3    2
j-3.i-1    6
j-3.i-2    4
j-3.i-3    1
```

```
j-4.i-1    3
j-4.i-2    3
j-4.i-3    2
j-5.i-1    1
j-5.i-2    4
j-5.i-3    3
/;
PARAMETERS d(z) müşterilerin talepleri
/
z-1      9
z-2      8
z-3      8
z-4      15
z-5      10
z-6      20
/;
Table TT(z,z) z düğümünden l düğümüne seyahat süresi
        z-0   z-1   z-2   z-3   z-4   z-5   z-6
z-0     0     5     7     3     1     9     10
z-1     5     0     10    7     9     13    2
z-2     7     10    0     6     7     8     5
z-3     3     7     6     0     2     4     1
z-4     1     9     7     2     0     7     10
z-5     9     13    8     4     7     0     3
z-6     10    2     5     1     10    3     0 ;
PARAMETERS n(z,j)  her bir müşterinin her bir ürün için talep miktarı
/
z-1.j-1    4
z-1.j-2    5
z-2.j-4    8
z-3.j-3    4
z-3.j-5    4
z-4.j-3    7
z-4.j-4    8
z-5.j-2    10
z-6.j-1    6
z-6.j-5    14
/;
parameter S(j);
S(j)=sum(z,n(z,j));
VARIABLES A;
BINARY VARIABLES X(i,j,k), Y(z,l);
POSITIVE VARIABLES t(i,k),C,u(z);
EQUATIONS
objfunc
cons1
cons2
cons3
cons4
cons5
```

```
cons6
cons7
cons8
cons9
cons10
;
objfunc..                              A =e= C + sum((z,l)$(ord(z) ne ord(l)),TT(z,l)*Y(z,l));
cons1(j)..                             sum((i,k), X(i,j,k)) =e= 1;
cons2(i,k)..                           sum(j, x(i,j,k)) =l= 1;
cons3(i,j,k)..                         C =g= t(i,k)+PT(j,i)*S(j)*X(i,j,k);
cons4(i,j,k,kp)$(ord(k)-ord(kp)eq 1).. t(i,k) =g= t(i,kp)+ S(j)*PT(j,i)*X(i,j,kp);
cons5(z)$(ord(z) gt 1)..               sum(l$(ord(z)<>ord(l)),Y(z,l)) =e= 1;
cons6(l)$(ord(l) gt 1)..               sum(z$(ord(z)<>ord(l)),Y(z,l))=e=1;
cons7..                                sum(z$(ord(z) gt 0), Y(z,'z-0'))-sum(z$(ord(z) gt 0),Y('z-0',z)) =e=
0;
cons8(z,l)$(ord(z) ne ord(l) and  (ord(z) gt 1) and (ord(l) gt 1))..          u(z)-u(l)+Q*Y(z,l) =l= Q-
d(l);
cons9(z)$(ord(z) gt 1)..               d(z) =l= u(z);
cons10(z)$(ord(z) gt 1)..              u(z) =l= Q;
model IPODS /all/;
solve IPODS using mip minimizing A;
```