

## ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİ İLE BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBE STATİK VE STABİLİTE ANALİZİ

Kanat Burak BOZDOĞAN, Alper SEZER ve Pelin AKLIK

Ege Üniv. Müh Fak. İnşaat Müh. Böl.

kanat@eng.ege.edu.tr, asezer@bornova.ege.edu.tr, pelinaklik@mynet.com

**Makalenin Geliş Tarihi:** 27.02.2004

**ÖZET :**Bu çalışmada elastik zemine oturan kirişlerin birinci ve ikinci merteye statik analizi için taşıma matrisi yöntemini temel alan bir yöntem sunulmuştur. Elastik zemine oturan kirişlerin yük altındaki davranışının Winkler hipotezine uyduğu kabulü yapılmıştır. Çalışmanın sonunda sunulan yaklaşımın matris-deplasman yöntemine yakınsaklığını araştırmak üzere literatürden alınan iki adet örnek sunulmuştur.

**Anahtar kelimeler:** Taşıma matrisi, Winkler hipotezi, elastik zemine oturan kiriş.

### First and Second Order Static and Stability Analysis of Beams on Elastic Foundations Using Transfer Matrix Method

**ABSTRACT:** In this study, a method based on transfer matrix method for the first and second order statical analysis of beams on elastic foundations is presented. It is assumed that the behavior of beams under loading is in agreement with the Winkler hypothesis. At the end of the study, two examples quoted from the literature are presented in order to investigate the advantage of the method to matrix-displacement method.

**Key words:** Transfer matrix, Winkler hypothesis, beams on elastic foundations.

### GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişlerin statik ve dinamik hesabına yönelik olarak literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan konunun başlıca eserlerinden birisi Hetenyi'nin kitabı hiç şüphesiz ki en başta gelmektedir (Hetenyi, 1946). Ülkemizde de bu konuda özellikle Çatal ve Alku (1996), Gülkan ve Alemdar (1994) ve Keskinel ve Kumbasar (1976)'ın çalışmaları dikkate değerdir. Sözü edilen çalışmalarda sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada ise elastik zemine oturan kirişlerin birinci ve ikinci merteye statik hesabı için taşıma matrisi yöntemine dayanan bir

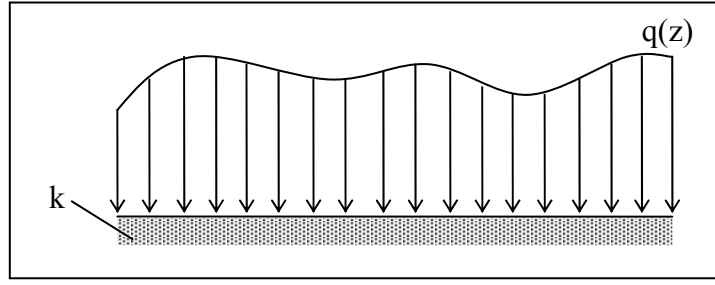
yaklaşım sunulmuştur. Çalışmada, taşıma matrislerinin elde edilmesinde;

- Malzemenin lineer-elastik olduğu,
- Zeminin yük altındaki davranışının Winkler hipotezine uyduğu kabulleri yapılmıştır.

Aşağıda sırasıyla birinci ve ikinci merteye taşıma matrislerinin elde edilmesinde izlenen yol sunulmuştur.

### BİRİNCİ MERTEBE TAŞIMA MATRİSİ

Bir kiriş elemanının elastik bir ortamda sürekli olarak mesnetlenmesi halinde elemanın elastik eğrisine ait diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmektedir :



Şekil 1. Elastik zemine oturan kiriş üzerinde yayılı yük.  
Figure 1. Distributed load over elastic soil.

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + ky = q(z) \quad (1)$$

Burada,

$EI$  :Kiriş elemanın eğilme rijitliğini,  
 $y$  :Kirişin elastik eğri fonksiyonunu,  
 $z$  :Kiriş üzerindeki bir noktanın başlangıca olan uzaklığını,  
 $q(z)$  :Kiriş üzerindeki yayılı yük fonksiyonunu göstermektedir (Şekil 1).

Burada  $k$ , elastik zemine oturan  $b$  genişlikli kirişin altındaki zeminin yatak katsayısını göstermektedir. Böylece (1) nolu diferansiyel denklem,  $q(z)=0$  durumunda,

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + ky = 0 \quad (2)$$

şeklinde dördüncü mertebeden homojen bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2) nolu diferansiyel denklemin çözümü

$$y = e^{\beta z} [C_1 \sin(\beta z) + C_2 \cos(\beta z)] + e^{-\beta z} [C_3 \sin(\beta z) + C_4 \cos(\beta z)] \quad (3)$$

şeklinde. Burada,

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \quad (4)$$

şeklinde verilen bir sabiti göstermektedir. (2) nolu elastik eğri ifadesinden yararlanılarak sırasıyla dönme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilirler

$$\begin{aligned} \theta = y' = & C_1 e^{\beta z} [\beta \sin(\beta z) + \beta \cos(\beta z)] + \\ & C_2 e^{\beta z} [\beta \cos(\beta z) - \beta \sin(\beta z)] + \\ & C_3 e^{-\beta z} [-\beta \sin(\beta z) + \beta \cos(\beta z)] + \\ & C_4 e^{-\beta z} [-\beta \cos(\beta z) - \beta \sin(\beta z)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} EI y'' = M = & C_1 E I e^{\beta z} [2\beta^2 \cos(\beta z)] + \\ & C_2 E I e^{\beta z} [-2\beta^2 \sin(\beta z)] + \\ & C_3 E I e^{-\beta z} [-2\beta^2 \cos(\beta z)] + \\ & C_4 E I e^{-\beta z} [2\beta^2 \sin(\beta z)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V = EI y''' = & C_1 E I e^{\beta z} [2\beta^3 \cos(\beta z) - 2\beta^3 \sin(\beta z)] + \\ & C_2 E I e^{\beta z} [-2\beta^3 \sin(\beta z) - 2\beta^3 \cos(\beta z)] + \\ & C_3 E I e^{-\beta z} [2\beta^3 \cos(\beta z) + 2\beta^3 \sin(\beta z)] + \\ & C_4 E I e^{-\beta z} [-2\beta^3 \sin(\beta z) + 2\beta^3 \cos(\beta z)] \end{aligned} \quad (7)$$

Yukarıdaki (3), (5), (6) ve (7) ifadelerinde yer alan şekil değiştirme, dönme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri matris formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y(z) \\ \theta(z) \\ M(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Burada  $\underline{A}_1$  matrisinin elemanları sırasıyla,

$$\begin{aligned} A_1(1,1) &= e^{\beta z} \sin(\beta z) \\ A_1(2,1) &= e^{\beta z} [\beta \sin(\beta z) + \beta \cos(\beta z)] \\ A_1(3,1) &= E I e^{\beta z} [2\beta^2 \cos(\beta z)] \\ A_1(4,1) &= E I e^{\beta z} [2\beta^3 \cos(\beta z) - 2\beta^3 \sin(\beta z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(1,2) &= e^{\beta z} \cos(\beta z) \\
A_1(2,2) &= e^{\beta z} [\beta \cos(\beta z) - \beta \sin(\beta z)] \\
A_1(3,2) &= EI e^{\beta z} [-2\beta^2 \sin(\beta z)] \\
A_1(4,2) &= EI e^{\beta z} [-2\beta^3 \sin(\beta z) - 2\beta^3 \cos(\beta z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(1,3) &= e^{-\beta z} \sin(\beta z) \\
A_1(2,3) &= e^{-\beta z} [-\beta \sin(\beta z) + \beta \cos(\beta z)] \\
A_1(3,3) &= EI e^{-\beta z} [-2\beta^2 \cos(\beta z)] \\
A_1(4,3) &= EI e^{-\beta z} [2\beta^3 \cos(\beta z) + 2\beta^3 \sin(\beta z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(1,4) &= e^{-\beta z} \cos(\beta z) \\
A_1(2,4) &= e^{-\beta z} [-\beta \cos(\beta z) - \beta \sin(\beta z)] \\
A_1(3,4) &= EI e^{-\beta z} [2\beta^2 \sin(\beta z)] \\
A_1(4,4) &= EI e^{-\beta z} [-2\beta^3 \sin(\beta z) + 2\beta^3 \cos(\beta z)]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Kiriş elemanının başlangıç noktası için (8) nolu eşitlik,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = \underline{A}_{1(z=0)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

şeklinde yazılır. Burada  $A_{1(z=0)}$ 'in elemanları,

$$\begin{aligned}
A_{1(z=0)}(1,1) &= 0 & A_{1(z=0)}(1,2) &= 1 \\
A_{1(z=0)}(2,1) &= \beta & A_{1(z=0)}(2,2) &= \beta \\
A_{1(z=0)}(3,1) &= 2EI\beta^2 & A_{1(z=0)}(3,2) &= 0 \\
A_{1(z=0)}(4,1) &= 2EI\beta^3 & A_{1(z=0)}(4,2) &= -2EI\beta^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1(z=0)}(1,3) &= 0 & A_{1(z=0)}(1,4) &= 1 \\
A_{1(z=0)}(2,3) &= \beta & A_{1(z=0)}(2,4) &= -\beta \\
A_{1(z=0)}(3,3) &= -2EI\beta^2 & A_{1(z=0)}(3,4) &= 0 \\
A_{1(z=0)}(4,3) &= 2EI\beta^3 & A_{1(z=0)}(4,4) &= 2EI\beta^3
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Buradan (9) nolu bağıntıda yer alan katsayılar vektörü çekilirse,

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \underline{A}_{1(z=0)}^{-1} \begin{bmatrix} y_{1(z=0)} \\ \theta_{1(z=0)} \\ M_{1(z=0)} \\ V_{1(z=0)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

elde edilir. Bu ifade (8) nolu ifadede yerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} y(z) \\ \theta(z) \\ M(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = \underline{A}\underline{A}_{(z=0)}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

elde edilir. Burada yer alan  $T = \underline{A}\underline{A}_{(z=0)}^{-1}$  ifadesi i nolu kiriş parçası için birinci mertebe taşıma matrisidir.

### STABİLİTE TAŞIMA MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

Bu çalışmada sunulan yöntem ile elastik zemine oturan kirişlerin stabilite analizi için kullanılacak stabilite taşıma matrisi, önceki bölümde açıklananlara benzer olarak elde edilebilir. Yukarıda yapılan işlemlere ek olarak normal kuvvet de ilave edilirse, ikinci mertebe etkiler de işlemlere dahil edilmiş olunur. Bu durumda (2) nolu diferansiyel denklem kiriş parçası boyunca sabit olan N ekseknel normal kuvvetin de dikkate alınmasıyla,

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + N \frac{d^2 y}{dz^2} + ky = 0 \quad (12)$$

halini alır. Burada N çekme durumunda pozitif, basınç durumunda b, negatif işaret alır. (12) nolu diferansiyel denklem, N'in işareti dikkate alınarak

$$EID^4 + ND^2 + k = 0 \quad (13)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (13) nolu karakteristik denklemden yararlanılarak (12) nolu diferansiyel denkleminin çözümü,

$$y = C_1 e^{D_1 z} + C_2 e^{D_2 z} + C_3 e^{D_3 z} + C_4 e^{D_4 z} \quad (14)$$

olur. Burada  $D_1, D_2, D_3$  ve  $D_4$  sırasıyla (13) nolu karakteristik denklemin kökleridir. (14) nolu şekil değiştirme fonksiyonundan yararlanarak birinci mertebe taşıma matrisinin elde edilmesine benzer şekilde, sırasıyla dönme,

moment ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\theta = C_1 D_1 e^{D_1 z} + C_2 D_2 e^{D_2 z} + C_3 D_3 e^{D_3 z} + C_4 D_4 e^{D_4 z} \quad (15)$$

$$M = EI \frac{d^2 y}{dz^2} = EI \left[ C_1 D_1^2 e^{D_1 z} + C_2 D_2^2 e^{D_2 z} + C_3 D_3^2 e^{D_3 z} + C_4 D_4^2 e^{D_4 z} \right] \quad (16)$$

$$V = EI \frac{d^3 y}{dz^3} + N \frac{dy}{dz} = EI \left[ C_1 D_1^3 e^{D_1 z} + C_2 D_2^3 e^{D_2 z} + C_3 D_3^3 e^{D_3 z} + C_4 D_4^3 e^{D_4 z} \right] + N \left[ C_1 D_1 e^{D_1 z} + C_2 D_2 e^{D_2 z} + C_3 D_3 e^{D_3 z} + C_4 D_4 e^{D_4 z} \right] \quad (17)$$

(14), (15), (16) ve (17) nolu ifadeler, matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y(z) \\ \theta(z) \\ M(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = \underline{A}_2 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Burada A matrisinin elemanları sırasıyla,

$$\begin{aligned} A_2(1,1) &= e^{D_1 z} \\ A_2(2,1) &= D_1 e^{D_1 z} \\ A_2(3,1) &= EI D_1^2 e^{D_1 z} \\ A_2(4,1) &= \left( EI D_1^3 + \frac{N}{EI} D_1 \right) e^{D_1 z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(1,2) &= e^{D_2 z} \\ A_2(2,2) &= D_2 e^{D_2 z} \\ A_2(3,2) &= EI D_2^2 e^{D_2 z} \\ A_2(4,2) &= \left( EI D_2^3 + \frac{N}{EI} D_2 \right) e^{D_2 z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(1,3) &= e^{D_3 z} \\ A_2(2,3) &= D_3 e^{D_3 z} \\ A_2(3,3) &= EI D_3^2 e^{D_3 z} \\ A_2(4,3) &= \left( EI D_3^3 + \frac{N}{EI} D_3 \right) e^{D_3 z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(1,4) &= e^{D_4 z} \\ A_2(2,4) &= D_4 e^{D_4 z} \\ A_2(3,4) &= EI D_4^2 e^{D_4 z} \\ A_2(4,4) &= \left( EI D_4^3 + \frac{N}{EI} D_4 \right) e^{D_4 z} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Kiriş elemanının başlangıç noktası için (18) nolu eşitlik,

$$\begin{bmatrix} y_{2(z=0)} \\ \theta_{2(z=0)} \\ M_{2(z=0)} \\ V_{2(z=0)} \end{bmatrix} = \underline{A}_{2(z=0)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

şeklinde yazılır. Burada  $A_{2(z=0)}$ 'ın elemanları,

$$\begin{aligned} A_{2(z=0)}(1,1) &= 1 & A_{2(z=0)}(2,1) &= D_1 \\ A_{2(z=0)}(1,2) &= 1 & A_{2(z=0)}(2,2) &= D_2 \\ A_{2(z=0)}(1,3) &= 1 & A_{2(z=0)}(2,3) &= D_3 \\ A_{2(z=0)}(1,4) &= 1 & A_{2(z=0)}(2,4) &= D_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2(z=0)}(3,1) &= EI D_1^2 \\ A_{2(z=0)}(3,2) &= EI D_2^2 \\ A_{2(z=0)}(3,3) &= EI D_3^2 \\ A_{2(z=0)}(3,4) &= EI D_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2(z=0)}(4,1) &= \left( EI D_1^3 + ND_1 / EI \right) \\ A_{2(z=0)}(4,2) &= \left( EI D_2^3 + ND_2 / EI \right) \\ A_{2(z=0)}(4,3) &= \left( EI D_3^3 + ND_3 / EI \right) \\ A_{2(z=0)}(4,4) &= \left( EI D_4^3 + ND_4 / EI \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan (19) nolu bağıntıda yer alan katsayılar vektörü çekilirse,

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \underline{A}_{2(z=0)}^{-1} \begin{bmatrix} y_{2(z=0)} \\ \theta_{2(z=0)} \\ M_{2(z=0)} \\ V_{2(z=0)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

elde edilir. Bu ifade (18) nolu ifadede yerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} y(z) \\ \theta(z) \\ M(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = A_2 A_{2(z=0)}^{-1} \begin{bmatrix} y_{II}(0) \\ \theta_{II}(0) \\ M_{II}(0) \\ V_{II}(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

elde edilir. Burada yer alan  $A_2 A_{2(z=0)}^{-1}$  çarpımı  $i$  nolu kiriş için stabilite taşıma matrisidir ve

$$T_{II-i} = A_2 A_{2(z=0)}^{-1} \quad (22)$$

şeklinde gösterilir.

### DÜŞEY YÜKLER ETKİSİNDE STATİK ANALİZ

Önceki bölümde elde edilen birinci ve ikinci mertebe stabilite taşıma matrisleri kullanılarak elastik zemine oturan kirişlerin düşey yükler etkisindeki statik analiz prosedürü aşağıda açıklanmıştır. Ardışık kiriş parçaları arasındaki bağlantıyı sağlayan  $T_i$  ( $T_i^I, T_i^{II}$ ) eleman taşıma matrisi ile deplasmanlar ve uç kuvvetleri arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ V_{i+1} \end{bmatrix} = \underline{T}_i \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{bmatrix} + \underline{F}_i \quad (23)$$

denklemleri ile sağlanabilir. Buradaki  $F_i$ ,  $i$  nolu kiriş parçasının bitiş ucundaki düşey dış yükü kapsar ve

$$\underline{F}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

vektörü ile tarif edilebilir. (23) numaralı denklem her bir eleman için yazılıp ardışık olarak uygulanırsa, elastik zemine oturan kirişin başlangıç ile bitiş ucu arasında aşağıda verilen ilişki elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} y_{son} \\ \theta_{son} \\ M_{son} \\ V_{son} \end{bmatrix} = \left[ \prod_{k=1}^n T_k \right] \begin{bmatrix} y_{baş} \\ \theta_{baş} \\ M_{baş} \\ V_{baş} \end{bmatrix} + \sum_{s=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=s+1}^n T_k \right] F_s + F_n \quad (25)$$

Bu denklemde;  $n$ , eleman sayısı,  $k$  ve  $s$  ise sırası ile baştan itibaren  $s+1$  ve  $s$  inci elemanlardır.

$$t = \prod_{k=1}^n T_k \text{ ve } P = \sum_{s=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=s+1}^n T_k \right] F_s + F_n \quad (26)$$

Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$t \begin{bmatrix} y_{son} \\ \theta_{son} \\ M_{son} \\ V_{son} \end{bmatrix} + P = \begin{bmatrix} y_{baş} \\ \theta_{baş} \\ M_{baş} \\ V_{baş} \end{bmatrix} \quad (27)$$

elde edilir. (27) denkleminde, sınır şartları dikkate alınarak bilinmeyenler elde edilir. Sınır şartları yardımıyla başlangıçta bilinmeyen olan deplasman, dönme, kesme kuvveti veya moment değerleri (23) ifadesinde yerlerine yazılırsa, her bir düğüm noktasındaki bilinmeyenler ( $y_i, \theta_i, M_i, V_i$ ) tayin edilebilir.

### KRİTİK BURKULMA YÜKÜNÜN TAYİNİ

Aşağıda, elastik zemine oturan kirişlerin kritik burkulma yükünün önceki bölümde verilen (21) bağıntısı yardımıyla nasıl bulunacağı açıklanmıştır. Buna göre, elastik zemine oturan kirişin başlangıç ve son noktaları arasındaki ilişki stabilite durumunda aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{bmatrix} y_{son} \\ \theta_{son} \\ M_{son} \\ V_{son} \end{bmatrix} = \underline{T}_n \underline{T}_{n-1} \dots \underline{T}_i \dots \underline{T}_1 \begin{bmatrix} y_{baş} \\ \theta_{baş} \\ M_{baş} \\ V_{baş} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Yukarıdaki denklemde  $\underline{S} = \underline{T}_n \underline{T}_{n-1} \dots \underline{T}_i \dots \underline{T}_1$  kabul edilirse, denklemin sınır şartlarını hesaba katarak nontrivial çözümünü sağlayan en küçük  $N$  değeri sistemin kritik burkulma yükünü vermektedir.

## BİLGİSAYAR PROGRAMININ AKIŞ DİYAGRAMI

Aşağıda bu çalışmada sunulan yöntemin sayısal uygulamaları için geliştirilen bilgisayar programının akış diyagramı verilmiştir. Bu çalışmada sunulan programın hazırlanmasında MATLAB 6.5 paket programı kullanılmıştır.

### ÖRNEKLER

Bu çalışmada sunulan yöntemin yaklaşıklığını göstermek üzere Literatürden alınan iki sayısal örnek çözülmüştür. Literatürden alınan örnekler ve kıyaslama sonuçları aşağıda verilmiştir.

#### Sayısal Örnek 1

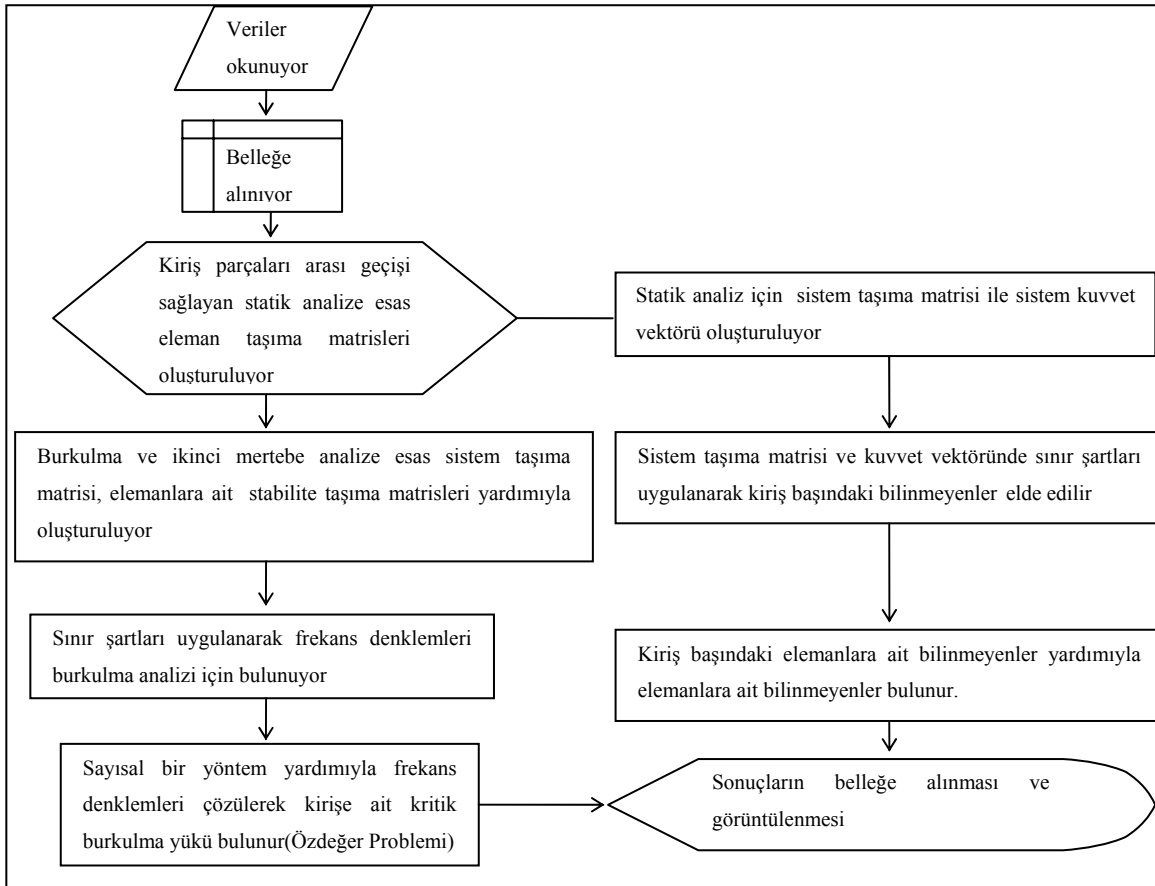
Referans (Gülkan ve Alemdar, 1994)'den alınan örnekte Şekil 3'de görülen elastik zemine oturan kirişin kesit ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$K = 14 \text{ N/mm}^2, E = 200000 \text{ N/mm}^2$$

$$I = 36900000 \text{ mm}^4$$

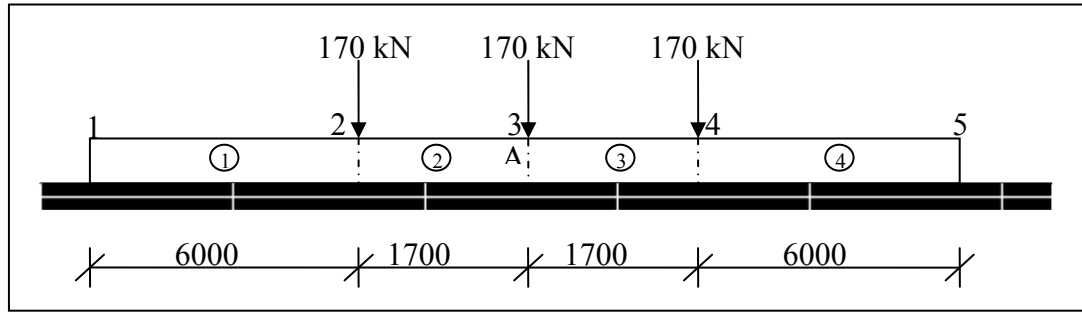
Söz konusu referansta verilen örnek, bu çalışmada sunulan yöntemle de çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çözüm aşağıda aşamalı olarak ele alınmıştır. Öncelikle, her eleman için (8) nolu bağıntıda yer alan  $A_1$ , (9) nolu bağıntıda yer alan  $A_0$  ve (11) nolu bağıntıda yer alan  $T$  taşıma matrisleri program dahilinde oluşturulmuştur.



Şekil 2. Yöntemin bilgisayar programına ait akış şeması.

Figure 2. Computer program flow chart of the method.



Şekil 3. Sayısal örnek 1.

Figure 3. Numerical sample 1.

(1) ve (4) nolu elemanlar için;  
 $\beta=0.8299$ ,

$$A = 10^6 \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3894 & 1.4252 & 0.0000 & -0.0001 \\ 1.5059 & 0.8595 & 0.0000 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 \\ 1.0165 & 0.0000 & 0.0000 & -1.0165 \\ 0.8435 & -0.8435 & 0.8435 & 0.8435 \end{bmatrix}$$

$$T = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ 7.1255 & 5.4668 & 0.0002 & -0.0003 \\ 4.2979 & 7.1255 & 0.0007 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

(2) ve (3) nolu elemanlar için,  
 $\beta=0.8299$ ,

$$A = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0004 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0004 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.6640 & -4.1133 & -0.0395 & 0.2448 \\ -2.8624 & -3.9644 & 0.2359 & -0.1704 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0.0001 & 0 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 \\ 1.0165 & 0 & -1.0165 & 0 \\ 0.8435 & -0.8435 & 0.8435 & 0.8435 \end{bmatrix}$$

$$T = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.9342 & -1.1248 & 0.0000 & 0.0001 \\ -2.0674 & -1.9342 & -0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

(1) nolu düğüm noktasındaki bilinmeyenlerle (2) nolu düğüm noktasının sol ucu bilinmeyenler arasındaki ilişki, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y_{2(sol)} \\ \theta_{2(sol)} \\ M_{2(sol)} \\ V_{2(sol)} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ 7.1255 & 5.4668 & 0.0002 & -0.0003 \\ 4.2979 & 7.1255 & 0.0007 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

(2) nolu düğüm noktasının sağ ucu için, (2) nolu düğüm noktasındaki kuvvet dikkate alınrsa, bu durumda, aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y_{2(sağ)} \\ \theta_{2(sağ)} \\ M_{2(sağ)} \\ V_{2(sağ)} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ 7.1255 & 5.4668 & 0.0002 & -0.0003 \\ 4.2979 & 7.1255 & 0.0007 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -170 \end{bmatrix}$$

(2) nolu elemana ait taşıma matrisinden yararlanılarak aşağıdaki bağıntıyla (3) nolu düğüm noktasının soluna aşağıdaki bağıntıyla geçilebilir:

$$\begin{bmatrix} y_{3(sol)} \\ \theta_{3(sol)} \\ M_{3(sol)} \\ V_{3(sol)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.9342 & -1.1248 & 0.0000 & 0.0001 \\ -2.0674 & -1.9342 & -0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2(sağ) \\ \theta_2(sağ) \\ M_2(sağ) \\ V_2(sağ) \end{bmatrix} \quad (31)$$

2 elemanın sağına ait vektör yerine (30) nolu bağıntıdaki eşiti yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} y_{3(sol)} \\ \theta_{3(sol)} \\ M_{3(sol)} \\ V_{3(sol)} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0002 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3225 & 1.6197 & 0.0003 & 0.0002 \\ -2.7661 & -0.3225 & 0.0002 & 0.0003 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0815 \\ -0.0318 \\ -251.0419 \\ -58.8280 \end{bmatrix} \quad (32)$$

İşlemler bundan sonra da diğer elemanlar için benzer şekilde yapılırsa, (1) nolu düğüm noktasıyla (5) nolu düğüm noktası arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y_5 \\ \theta_5 \\ M_5 \\ V_5 \end{bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3821 & 0.8321 & 0.0002 & 0.0001 \\ -1.7802 & -0.3821 & 0.0001 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{bmatrix} + 10^5 \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0002 \\ -1.5993 \\ -0.6485 \end{bmatrix} \quad (33)$$

(33) nolu denklemde sisteme ait sınır şartlarına  $M_1=V_1=M_5=V_5=0$  yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} y_5 \\ \theta_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3821 & 0.8321 & 0.0002 & 0.0001 \\ -1.7802 & -0.3821 & 0.0001 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 10^5 \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0002 \\ -1.5993 \\ -0.6485 \end{bmatrix} \quad (34)$$

elde edilir. (34) nolu denklemde gerekli indirgemeler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1.5993 \\ 0.6485 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0.3821 & 0.8321 \\ -1.7802 & -0.3821 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

elde edilir. Buradan,  $y_1 = -0.0000707$  ve  $\theta_1 = 0.0001597$  dir. Bu değerler (30) nolu denklemde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} y_{2(sağ)} \\ \theta_{2(sağ)} \\ M_{2(sağ)} \\ V_{2(sağ)} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ 7.1255 & 5.4668 & 0.0002 & -0.0003 \\ 4.2979 & 7.1255 & 0.0007 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -170 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0000707 \\ 0.0001597 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$y_{2(sağ)} = -0.0063$  m.,  $\theta_{2(sağ)} = -0.0022$ ,  $M_{2(sağ)} = 36.9274$  kNm ve  $V_{2(sağ)} = -86.5916$  kN değerleri bulunabilir. Bunlar (31) nolu bağıntıda yerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} y_{3(sol)} \\ \theta_{3(sol)} \\ M_{3(sol)} \\ V_{3(sol)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.9342 & -1.1248 & 0.0000 & 0.0001 \\ -2.0674 & -1.9342 & -0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0063 \\ -0.0022 \\ 36.9274 \\ -86.5916 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0063 \\ -0.0022 \\ 36.9274 \\ -86.5916 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Buradan  $y_{3(sol)} = -0.0079$  m.,  $\theta_{3(sol)} = 0$ ,  $M_{3(sol)} = 30.4291$  kNm ve  $V_{3(sol)} = -84.7648$  kN elde edilebilir. Elde edilen sonuçların Gülkan ve Alamdardar (1994)'de verilen değerler ile karşılaştırılması Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Referanstan (Gülkan ve Alemdardar,1994) alınan örnek ve bu çalışmada elde sonuçların karşılaştırılması

Table 1. Comparison of example in referance (Gülkan and Alemdardar,1994) and the obtained values in this study

Bilinmeyenler	Referans 2 (4 eleman)	Bu çalışma (4 eleman)	Göreceli Hata (%)
A noktasındaki deplasman (mm.)	7.8573	7.9000	0.54
A noktasındaki moment (kNm.)	30.525	30.429	-0.31

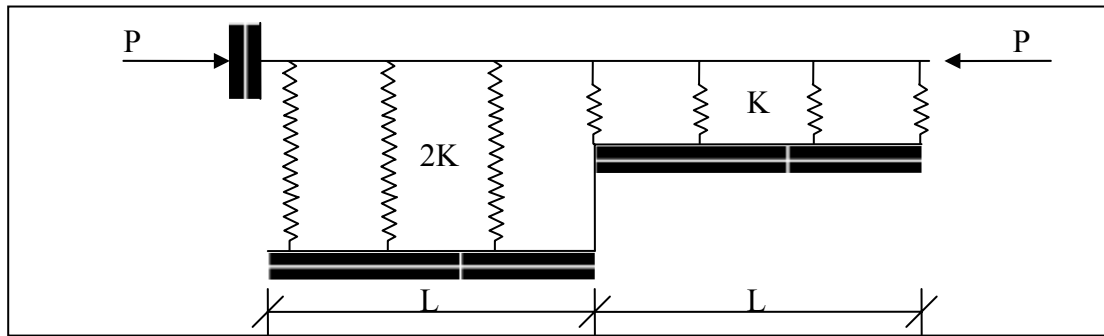


### Sayısal Örnek 2

Gülkan ve Alemdar (1994)'den alınan ve Şekil 3'de kesiti görülen elastik zemine oturan kirişin kesit ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.  $K = 600 \text{ kN/m}^2$   $EI = 180 \text{ kN/m}^2$   $L = 2 \text{ m}$ .

Verilen örneğe ait kritik burkulma yükü, referans (Gülkan ve Alemdar,1994)'de sonlu

elemanlar yöntemiyle 2, 4, 6 ve 8 parçalı olarak çözülmüştür. Bu çalışmada sunulan yöntemle yapılan çözümde ise, sistem iki parçalı olarak çözülmüş ve bunun sonucunda iki parçalı çözümün referans (Gülkan ve Alemdar, 1994)'de yapılan 8 parçalı sonuca çok yakın sonuç verdiği görülmüştür. Aşağıda sonuçlar bir tablo halinde sunulmuştur.



Şekil 4. Sayısal örnek 2.

Figure 4. Numerical sample 2.

Tablo 2. Referanstan [Gülkan ve Alemdar,1994]'ten alınan örnek ve bu çalışmada elde sonuçların karşılaştırılması.

Table 2. Comparison of example in reference [Gülkan and Alemdar,1994] and the obtained values in this study.

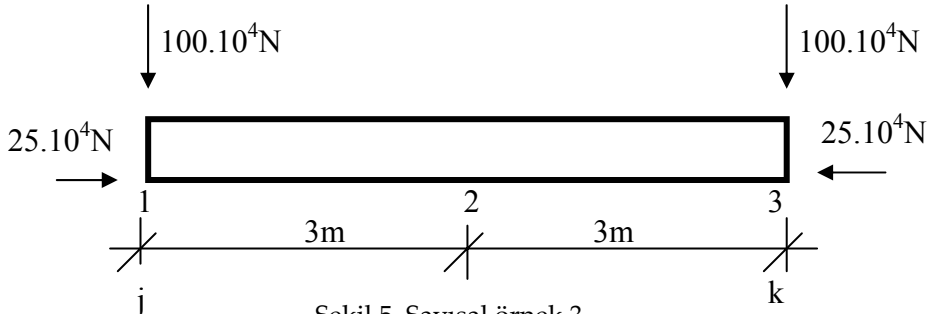
Bilinmeyenler	Referans 1 (8 eleman)	Bu çalışma (2 eleman)	Göreceli Hata (%)
Kritik burkulma yükü (kN)	343.77	343.69	-0.023

Yapılan çözümde, önce her elemana ait ikinci mertebe stabilite taşıma matrisleri (18), (19) ve (21) nolu bağıntılarla hesaplanır. Bağıntılardan de görüldüğü gibi, taşıma matrisleri P eksenel kuvvetin bir fonksiyonudur. Göz önüne alınan kirişte önce, başlangıç ve bitiş noktası arasındaki ilişki, P'nin bir fonksiyonu olarak yazılır. Daha sonra, yazılan bu eşitlikte, göz önüne alınan sisteme ait sınır şartları olan ankastre uçta deplasman ve dönmenin sıfır olması dikkate alınır, nontrivial çözümü veren bir bağıntı elde edilir. Buradan bu bağıntıyı sağlayan en küçük P değeri sistemin kritik burkulma yükünü verecektir. Tablo 2'de referans (Gülkan ve Alemdar, 1994)'de verilen ve bu çalışmada elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. *Sayısal Örnek 3*

Çatal ve Alku (1996)'dan alınan ve Şekil 5'de kesiti görülen elastik zemine oturan kirişin kesit ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$K = 1.10^8 \text{ N/m}^2, \quad EI = 1.10^9 \text{ kN/m}^2, \quad L = 6 \text{ m}.$$

Verilen örneğe ait 1 nolu düğüm noktasındaki deplasman ve 2 nolu düğüm noktasındaki moment değerleri bu çalışmada sunulan taşıma matrisi yöntemiyle çözülmüştür. Bu çalışmada sunulan yöntemle yapılan çözümde, sistem iki parçalı olarak çözülmüş ve bunun sonucunda iki parçalı çözümün referans (Çatal ve Alku, 1996)'da yapılan 2 parçalı sonuca çok yakın sonuç verdiği görülmüştür. Aşağıda sonuçlar bir tablo halinde sunulmuştur.



Şekil 5. Sayısal örnek 3.

Figure 5. Numerical sample 3.

Tablo 3. Referanstan [Çatal ve Alku,1996] alınan ve bu çalışmada elde sonuçların karşılaştırılması.

Table 3. Comparison of first example in referance [Çatal and Alku,1996] and the obtained values in this study.

Bilinmeyenler	Referans 1 (2 eleman )	Bu çalışma (2 eleman)	Göreceli Hata (%)
1 noktasındaki deplasman (mm.)	6.22	6.2	-0.32
2 noktasındaki moment (Nm.)	115.19*10 <sup>4</sup>	114.03*10 <sup>4</sup>	-1

## SONUÇ

Bu çalışmada, elastik zemine oturan kirişlerin statik ve stabilite analizi için taşıma matrisi yöntemini esas alan bir yaklaşım sunulmuştur. Yaklaşım, sonlu elemanlar yöntemine göre daha kısa sürede programlanabilmektedir. Çalışmanın sonunda, literatürden alınan örneklerin

çözümünden sunulan yaklaşımın yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlara dayanarak, sunulan yöntemin gerek ön boyutlandırma aşamasında, gerekse kesin hesap aşamasında güvenle kullanılabilceğine inanılmaktadır.

## KAYNAKLAR

- Çatal, H.H. ve Alku, S., 1996, Elastik Zemine Oturan Çubuğun İkinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Hesabı, Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi, TÜBİTAK, 20, 195-201.
- Gülkan, P. ve Alemdar, B.M., 1994, Elastik zemine oturan kirişler için sonlu elemanlar, Yapı Mekaniği Semineri 94', Dumlupınar Üniversitesi, No. 2.
- Hanselman D. ve Littlefield B., 1996, Mastering MATLAB, Prentice-Hall, New Jersey, 542 s.
- Hetenyi, M., 1946, Beams on Elastic Foundations, University of Michigan Press, Michigan, 255 s.
- Keskinel, F. ve Kumbasar, N., 1976, Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, İ.T.Ü. Matbaası, İstanbul, 260 s.